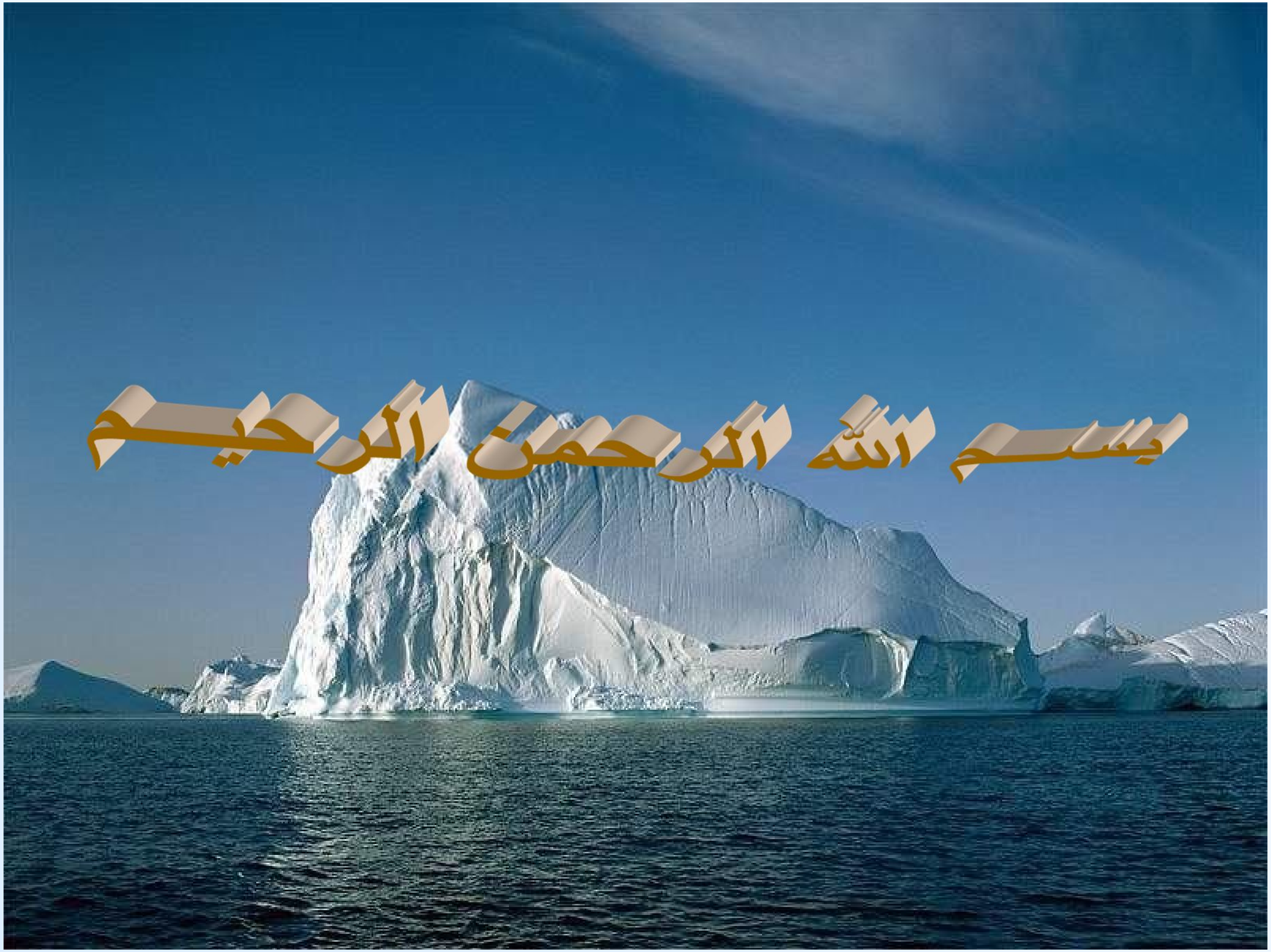
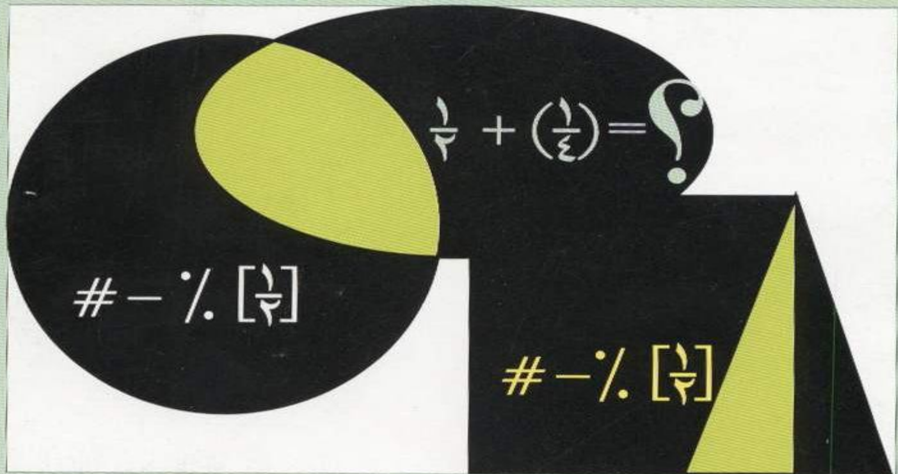

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

ریاضیات پایه

لیدا فرخو



نسخهٔ آزمایشی

نـــام درس: ریاضیات وکاربرد آن در مدیریت(۱)

تعداد واحد: ۳ واحد

نام منــبع : ریاضیات پایه

مؤلــــــف: لیـــدا فـــرخو

تهیه کننده: مهدی صحت خواه

ناشـــــــر: دانشگاه پیـــــام نور

هدف کلی درس

هدف كلي اين درس آموزش مباحثی از ریاضیات است که دانشجویان رشته های رشته های علوم انسانی دردروس تخصصی خود به آنها نیاز خواهند داشت.

مباحث کتاب

برای نیل به اهداف کلی ،مباحث زیر درشش فصل تدوین شده است.

فصل اول: نظریه مجموعه ها

که شامل 44 اسلاید می باشد.

فصل دوم: دستگاههای مختصات

که شامل ۴۷ اسلاید می باشد.

فصل سوم: رابطه وتابع

که شامل 69 اسلاید می باشد.

فصل چهارم: حد وپیوستگی توابع

که شامل ۷۱ اسلاید می باشد.

فصل پنجم: مشـــتق

که شامل ۷۱ اسلاید می باشد.

فصل ششم: کاربردهای مشتق

که شامل ۷۴ اسلاید می باشد.

در آغاز هر فصل نکاتی به عنوان راهنمای مطالعه وهدف کلی آمده است،که به شما کمک می کند تا منظور کل آن فصل را دریابید،درقسمتی که با عنوان هدف های رفتاری وآموزشی مشخص شده است ،ازشما انتظارمی رود که پس ازپایان مطالعه هرفصل مطالبی را که یادگرفته اید با توجه به هدف های رفتاری بسنجید.

یادگیری می تواند مثلا" بیان یک مفهوم ،مقایسه دو مفهوم بایکدیگر، توضیح یک قضیه نتیجه گیری ازیک مطلب، یا حل یک مسئله باشد.نظر به پیوستگي مفاهیم ریاضی ،تا زمانی که به هدف های یک فصل نایل نشده اید،و مسائل آن فصل را حل نکرده اید به فصل بعدی نپردازید.

فصـــل اول

نظریه مجموعه ها

هدف کلی:

هدف کلی این فصل این است که با مفهوم مجموعه ،انواع آن،اعمال جبری

روی مجموعه ها،و ویژگی های این اعمال آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱. مجموعه هاراشناسایی کنید.

۲. عضوهای مجموعه های داده شده راتعیین کنید.

۳. زیرمجموعه های هر مجموعه داده شده راتعیین کنید.

۴. مجموعه تهی راشناسایی کنید.مثال هایی از مجموعه تهی بیاورید.

۵. اعمال جبری روی مجموعه هاراتعریف کنیدوبرای مجمـوعه های داده شده ، اعمال مورد نظر راانجام بدهید.

۶. بازه های باز وبسته راتشخیص بدهیدو آنها را به صورت مجموعه نمایش بدهید.

۷. مفهوم مجموعه جهانی را توضیح بدهید.

٨. مکمل هر مجموعه را نسبت به مجموعه جهانی داده شده ،تعیین کنید.

٩. ویژگی های اعمال جبری روی مجموعه هارابیان کنید ودرمسائل به کارببرید.

٠١.قوانین «دمورگان »را بیان کنیدودرمسائل به کارببرید.

١١.تعدادعناصر هرمجموعه متناهی داده شده راتعیین کنید.

٢١.حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه رابیان کنید وآن رابرای مجموعه های داده شده محاسبه کنید.

مقدمه:

مجموعه یکی از بنیادی ترین مفاهیم درریاضیات است وغالبا" نقطه آغازی برای ریاضیات پایه و کاربردهای آن در بسیاری از علوم محسوب می شود. مثلا"،در رشته مدیریت درموارد بسیاری صحبت از مجموعه تولیدات یک کارخانه ،یا مجموعه کارگران یک کارگاه ،یا مجموعه تصمیمهای ممکن برای مدیر یک واحد ونظایر آن به میان می آید.برای درک بسیاری ازمطالب ارائه شده دراین کتاب، آشنایی باتعاریف ومفاهیم اولیه نظریه مجموعه ها ضروری است.

دراین فصل ،مفهوم بنیادی مجموعه واعمال جبری روی مجموعه ها راموردبحث قرار می دهیم.

۱-۱مفهوم مجــــموعه

۱-۱-۱مفهوم شهودی مجموعه

مفهوم ریاضی یک مجموعه با مفهوم شهودی(عادی یا روز مره) آن تفاوت دارد یک مجموعه ازنظر ریاضی هنگامی معین است که اشیای تشکیل دهنده آن کاملا" مشخص باشند.به بیان دیگر هنگامی که برای هر شی به دقت بتوان تـعیین کرد آن شی به آن مجموعه دارد یا تعلق ندارد.

به طورکلی ،صفاتی مانند مهـــارت،تبحر، زیبایی، زشـتی،کوچکی،بزرگی، خوشمزگی،وخوش سليقگي و...که تعریف دقیقی ندارند ،نمی توانند مشخص کننده یک مجموعه باشند.

۱-۱-۲ مثال:

هریک ازدسته های زیر یک مجموعه است:

أ- دسته اعدادصحیح از ۱تا۱۰۰.

ب- دسته حروف الفبای زبان فارسی.

ج- آن دسته ازدانشجویان دانشگاه پیام نور که سن آنها کمتر از ۲۵ است.

د- دسته کتاب های درسی سال اول ابتدایی.

ه- دسته شهرهای کشور جمهوری اسلامی ایران.

و- دسته سیارات منظومه شمسی.

۱-۱-۳قرارداد:

اگر x، عضوی از مجموعه S باشد، می نویسیم:

$$x \in S$$

ومی خوانیم «x متعلق به مجموعه s است» یا «xعضوی از Sاست» یا به طور خلاصه،«x در Sاست».نقیض $S \ni x$ رابا نماد

$$x \notin S$$

نشان می دهیم ومی خوانیم«x عضو Sنیست» یا «xبه sتعلق ندارد» یا به طور خلاصه، «x در Sنیست».

ازاین پس مجموعه ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A ,B, C ,D,... و عضو های آنها را باحروف کوچک لاتین نظیر a, b, c, d, ...،نشان خواهیم داد.

۱-۱-۴ نکته:

مجموعه S زمانی معین است که برای هر شی x بتوان تشخیص دادکه x، به S تعلق دارد یا نه.

۱-۱-۶ نمایش مجمو عه ها:

برای نمایش یک مجمو عه تمام عضو های آن را، که با علامت «,» از هم جدا کرده ایم، درداخل ابرو می آوریم:

$S = \{5,8,26,73\}$ و $A = \{2,4,6,8\}$

✪توجه کنید که ترتیب نوشتن اعضای مجموعه ، اهمیتی ندارد.برای مـثال دو مجموعه

$\{3,1,2\}$ و $\{1,2,3\}$

درواقع یک مجموعه را نمایش می دهند.

درمواردی که نوشتن تمام عضو های یک مجموعه غیرعملی باشد، مانند مجموعه تمرین ۱-۱-۵(ب)،معمولاً عضو ها را می توانیم برحسب خاصیت مشترکی معین کنیم .فرض می کنیم گزاره $P(x)$، بیان کننده این خاصیت مشــترک مربوط به x باشد. دراین صورت اگر مجموعه S شامل تمام x هایی باشد که به ازای آنها گزاره $P(x)$درست است ،می نویسیم:

$$S = \{x | P(x)\}$$

مانند

$$A = \{x \in Q | (2x-1)(3x+4) = 0\}$$

۱-۱-۷ مثال:

الف) مجموعه اعداداول بین ۱ تا۳۰ را می توان به صورت

نشان داد. $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$

ب)مجموعه ریشه های حقیقی معادله جبری $x^2+4x-1=0$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\{x \in R \mid x^2+4x-1=0\}$$

پ) مجموعه اعداد صحیح فردومثبت را می توانیم به هریک از صورت های زیر نشان بدهیم:

$$\{x \mid x=2k-1, k \in N\}$$

یا

$$\{1,3,5,7,\dots\}$$

۱-۱-۱۰تعریف:

مجموعهS راتهی می نامیم،اگروتنها اگر دارای هیچ عضوی نباشد.مجموعه

تهی را معمولا"با حرف یونانی ϕ(فی)نشان می دهیم.بنابراین نماد

$$S = \phi$$

«مجموعه S تهی است» خوانده می شود.اگر مجموعه Sتهی نباشد،می نویسیم

ومی خوانیم«Sتهی نیست» یا «Sناتهی است».

$$S \neq \phi$$

درنتیجه، $S \neq \phi$ خواهد بوداگروتنها اگر حداقل دارای یک عضو باشد.

۱-۱-۱۳تعریف:

دومجموعه Aو Bرادرنظر می گیریم.اگر هرعضو مجموعه Aعضوی از مجموعه

Bهم باشد ،Aرایک زیر مجموعه Bمی نامیم وبا نماد

$$A \subseteq B$$

نشان می دهیم ومی خوانیم «Aزیرمجموعه Bاست» یا «Bشامل Aاست».

نماد $\subseteq$ را علامت شمول یا جزئیت می گوییم.

درصورتیکه Aزیر مجموعه ای از Bنباشد، می نویسیم

$$A \not\subset B$$

۱-۱-۱۴تعریف:

فرض می کنیم مجموعه A،زیرمجموعه ای از مجموعه B، باشد.اگر B حداقل یک

عضو داشته باشدکه درمجموعه A نباشد،آنگاه مجموعه Aرایک زیرمجموعه سرهB

می نامیم وبا نماد زیرنشان می دهیم.

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$

درصورتیکه مجموعه Aزیر مجموعه سره Bنباشد می نویسیم

$$\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$$

۱-۱-۵۱مثال:

مجموعه های زیر رادر نظر می گیریم:

$$A = \{x \mid x \in Z^+, x \le 100\}$$
$$B = \{x \mid x \in Z^+, x \le 50\}$$

روشن است که هـر عضـو مجموعه Bبه مجموعه Aنیز تعلق دارد.پس

$$B \subseteq A$$

ازطرفی $80 \in A$ ولی $80 \notin B$ پس Bیک زیر مجموعه سره Aاست،یعنی

$$B \subset A$$

اکنون فرض می کنیم که

$C = \{x \mid x \le 720$ ، xعدد صحیح مثبتی است که بر ۴ بخشپذِراست $\}$

Cزیـر مجمـوعه ای از Aنیست،زیـرا $180 \in C$ ولی $180 \notin A$.پس

$$C \not\subset A$$

توجه کنید که Aهم زیرمجموعه ای از مجموعه Cنیست، زیرا $29 \in A$ ولی $29 \notin C$پس

$$A \not\subset C$$

۱-۱-۲۰قضیه:

اگر تعداد عضوهای مجموعه Aبرابر عدد طبیعی nباشد،آنگاه تعداد کل زیر مجموعه های Aمساوی 2^n است.

۱-۱-۲۲تعریف:

مجموعه تمام زیر مجموعه های Aرا مجموعه توانی Aمی نامیم وآن را با نماد P(A) نشان می دهیم.

۱-۱-۲۳ مثال:

فرض کنید $A = \{a, b\}$ تمام زیر مجموعه های A عبارتند ا ز

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

بنابراین P(A)، مجموعه توانی A برابر است با

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

بنابر قضیه۱-۱-۲۰ اگر مجموعه A دارای n عضو باشد،تعدادعضوهای مجموعه

P(A)، برابر 2^n خواهد بود.

۱-۱-۲۶تعریف:

دومجموعه AوB، رامساوی (یا برابر)می نامیم اگروتنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$

دراین صورت می نویسیم

$$\mathbf{A = B}$$

به بیان دیگر ، دو مجموعه رامســاوی می نامیم،اگروتنها اگر دارای عضوهای یکسانی باشند.

۳۱-۱-۱تعریف:

فرض می کنیم a و b دوعددحقیقی باشند به طوری که a<b.

الف)مجموعه تمام اعداد حقیقی xرا که $a \leq x \leq b$ ،بازه **بسته** aوbمی نامیم و

بانماد [a,b]نشان می دهیم.پس

$$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

درشکل ۱-۱بخشی از خط حقیقی که پررنگ کشیده شده است [a,b] رانشان

می دهد.

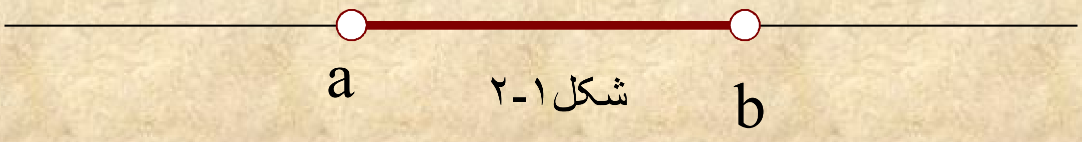
شکل ۱-۱

ب)مجموعه تمام اعدادحقیقی x را که $a<x<b$، بازه باز a و b می نامیم وبانماد

(a,b) یا $]a,b[$ نشان می دهیم.بنابراین

$$(a,b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$$

درشکل ۱-۲قسمت پررنگ خط حقیقی ،نشان دهنده (a,b)است.



شکل۱-۲

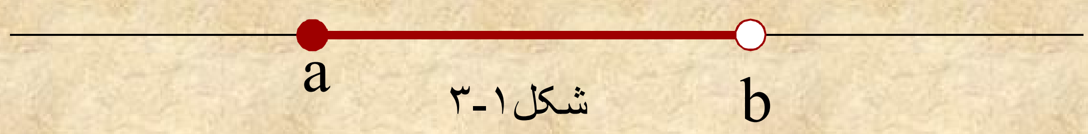
✪ توجه کنید که خود اعداد a و b به بازه (a,b) تعلق ندارند،وبه همین علت درشکل ۱-۲بادایره های توخالی نشان داده شده اند.

پ) هریک ازمجموعه های

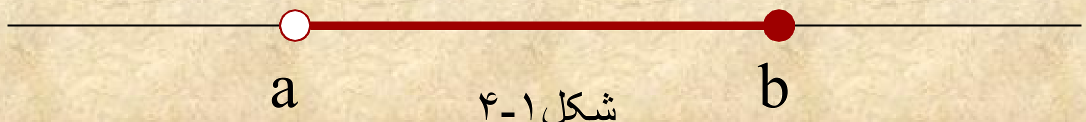
$$\{x \in R \mid a \le x < b\} \qquad \{x \in R \mid a < x \le b\}$$

رایک بازه نیمباز a وb می نامیم وبه ترتیب بانمادهای $[a,b)$ و$(a,b]$ نشان می دهیم.

به شکل های ۱-۳ و ۱-۴ نگاه کنید.



شکل ۱-۳



شکل ۱-۴

ت)هنگام استفاده از علامت های $\pm\infty$ باید مواظب باشیم که این نمادها رابا اعداد

حقیقی اشتباه نکنیم.زیرا آنها خواص اعدادحقیقی را ندارند.بنابراین بازه های زیر را داریم:

$$(-\infty,b]=\{x\in R \mid x\le b\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\in R \mid x\ge a\}$$

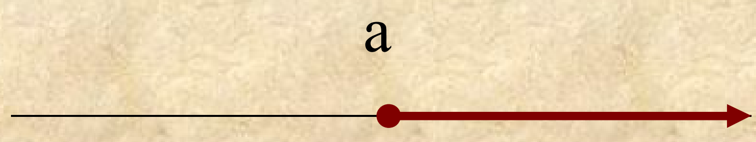
$$(-\infty,+\infty)=R$$

$$(a,+\infty)=\{x\in R \mid x>a\}$$

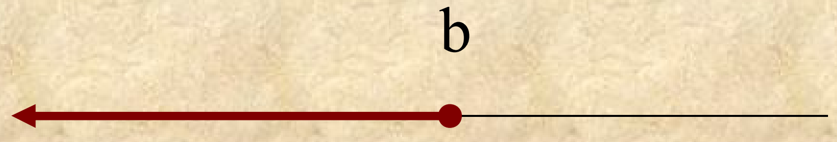
$$(-\infty,b)=\{x\in R \mid x<b\}$$

شکل ۱-۵بازه $(a,+\infty)$ وشکل ۱-۶ بازه $(-\infty,b]$ رانمایش می دهد.توجه کنیدکه

بازه مجموعه تمام اعدادحقیقی را نمایش می دهد.



شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

در هریک از بازه های (a,b)، [a,b]، [a,b)، (a,b]، اعدادحقیقی a وb را نقاط

انتهایی بازه می نامیم.

۱-۱-۲۳مثال:

مجموعه جواب نا معادله $2+3x<5x+6$ راتعیین کنیدوآن راروی محور اعداد

حقیقی نمایش بدهید.

حل:

اگر x عددی باشدکه در نامساوی صدق می کند،بایدداشته باشیم

$x>-2$ یا $-2x<4$

چون تمام مرحله های بالا برگشت پذیر هستند، نتیجه می گیریم که

$$2+3x<5x+6 \Leftrightarrow x>-2$$

بنابراین مجموعه جواب نا معادله مفروض ،بازه $(-2,+\infty)$ است که در شکل۱-۷

نشان داده شده است.

شکل۱-۷

۲-۱اعمال جبري روي مجـــموعه ها

۱-۲-۱مقدمه:

تشابهی میان نظریه مجموعه هاونظریه اعداد حقیقی وجوددارد.باچهار عمل اصلی

جمع،تفریق ،ضرب ،تقسیم روی مجموعه اعداد حقیقی آشـنا هشتیم.اعمال جبری

مشابهی را می توان برای مجموعه ها نیز تعریف کرد.دراین بخش به معرفی و

بررسی این اعمال می پردازیم .

۱-۲-۲تعریف:

فرض می کنیم AوBدو مجموعه باشند،مجموعه تمام عضوهایی را که حداقل به

یکی ازاین دو مجموعه تعلق داشته باشند،اجتماع AوBمی نامیم وبانماد $\mathbf{A \cup B}$

نشان می دهیم.به بیان دیگر

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

۱-۲-۳مثال:

الف)فرض می کنیم $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,c,d,e\}$. اجتماع دو مجموعه AوB بنابر تعریف ۱-۲-۲عبارتست ا ز

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

ب)فرض می کنیم Aمجموعه تمام افرادی باشد که روزنامه کیهان را می خوانند وBمجموعه تمام افرادی باشدکه روزنامه اطلاعات را می خوانند. $A \cup B$عبارت است از مجموعه تمام افرادی که حداقل یکی از روزنامه های کیهان یا اطلاعات را می خوانند.

۱-۲-۴تعریف:

فرض می کنیم AوBدو مجموعه باشند،مجموعه تمام عضوهایی را که به هردو مجموعه تعلق داشته باشند،اشتراك AوBمی نامیم وبانماد $\mathbf{A \cap B}$ نشان می دهیم.به بیان دیگر $A \cap B = \{x \mid x \in A , x \in B\}$

۱-۲-۳مثال:

الف)فرض می کنیم $A = \{1,2,3,7\}$ و $B = \{0,2,4,7\}$. اشتراك دو مجموعه A وBبنابر تعریف۱-۲-۴عبارتست از

$$A \cap B = \{2,7\}$$

ب)مجموعه $A \cap B$ درمثال ۱-۲-۳(ب)عبارتست از مجموعه تمام افرادی که هردوروزنامه کیهان واطلاعات را می خوانند.

عمل های اجتماع واشتراک از قوانین خاصی پیروی می کنند.این قوانین غالبا"

بدیهی اندوما ،به منظور سهولت کاربرد، آنها رادر قالب سه قضیه زیر می آوریم.

۱-۲-۷قضیه:

برای هر سه مجموعه دلخواه Aو Bو Cومجموعه جهانی Uداریم

۱) $A \cup \phi = A$

۲) $A \cup A = A$

۳) $B \cup A = A \cup B$

۴) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

۵) $A \subseteq A \cup B$ $\quad$ $B \subseteq A \cup B$

۶) $A \cup U = U$

۱-۲-۸قضیه:

برای هرسه مجموعه دلخواه A،B وCومجموعه جهانی Uداریم

۱) $A \cap \phi = \phi$

۲) $A \cap A = A$

۳) $B \cap A = A \cap B$

۴) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۵) $A \cap B \subseteq B$ $\quad$ $A \cap B \subseteq A$

۶) $A \cap U = A$

۱-۲-۹نکته:

بااستفاده از قسمت۴ درقضیه های ۱-۲-۷و۱-۲-۸ ،می توانیم پرانتزها را

حذف کنیم واجتماع واشتراک سه مجموعه را به صورت های

$A \cap B \cap C$ $\qquad$ $A \cup B \cup C$

بنویسیم.ازقسمت۵قضیه های مذکورنتیجه می شودکه $A \cap B \subseteq A \cup B$

۱-۲-۱۰ قضیه:

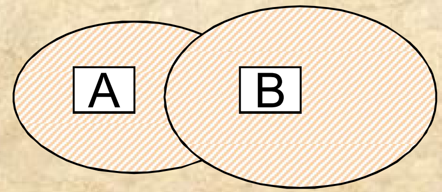
برای هرسه مجموعه دلخواه Aو B و C،داریم

۱) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

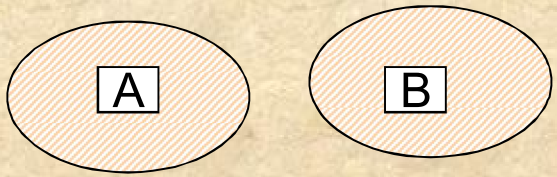
۲) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۱-۲-۲ ۱نمودارون:

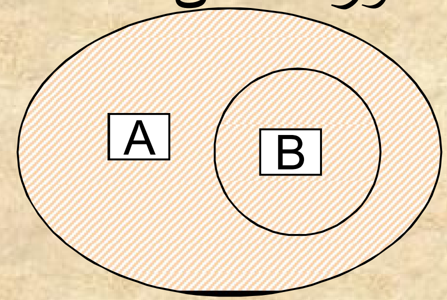
معمولابرای روشن تر شدن روابط بین مجموعه هااز نمودار ون استفاده می کنیم، که مثال هایی ازآن در شکل ۱-۸ آمده است. درهریک از این نمودارهاناحیه سایه خورده نشان دهنده مجموعه ای است که درزیر نمودارنوشته شده است.



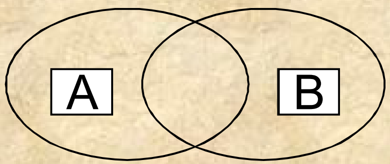
A ∪ B



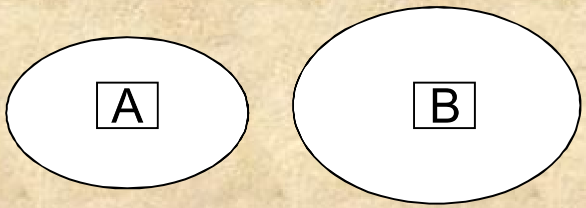
A ∪ B



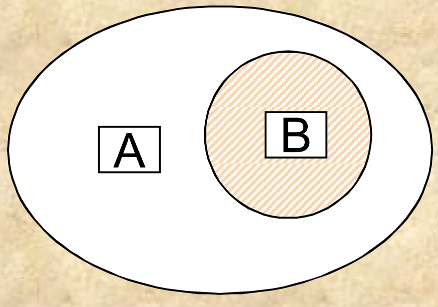
A ∪ B



A ∩ B



A ∩ B



A ∩ B

۱-۲-۱۳تعریف:

دومجموعه Aو Bرا **از هم جدا** می نامیم درصــورتی که عضو مشترکی نداشته

باشند.به بیان دیگر،هرگاه $A \cap B = \phi$ آنگاه مجموعه Aو B را ازهم جدا می خوانیم.

۱-۲-۱۴مثال:

الف) مجموعه اعداد صحیح فرد و مجموعه اعدادصحیح زوج،دومجموعه ازهم

جداهستند.

$$A \cap B = \phi$$

۱-۲-۱۵تعریف:

دومجموعه AوBرادرنظر می گیریم.**تفاضل** مجموعه Bازمجموعه A،آن را بانماد

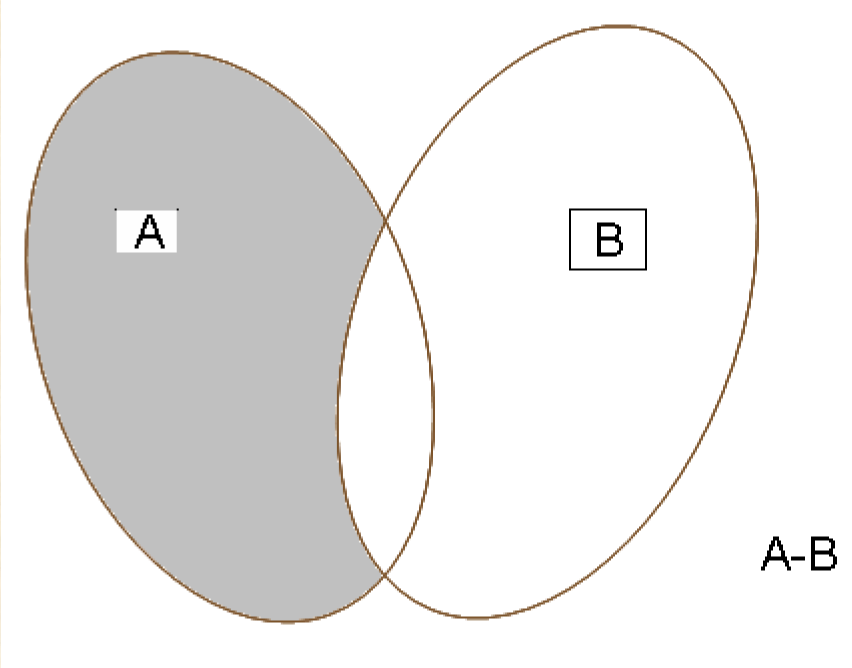
A-Bنشان می دهیم،عبارتست از تمام عضو هایی از Aکه عضوBنیستند. به

بیان دیگر

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

درشکل ۱-۹ناحیه سایه خورده ،تفاضل BازAیعنی A-Bرابرای مجموعه های

دلبخواه AوB نشان می دهد.



شکل ۱-۹

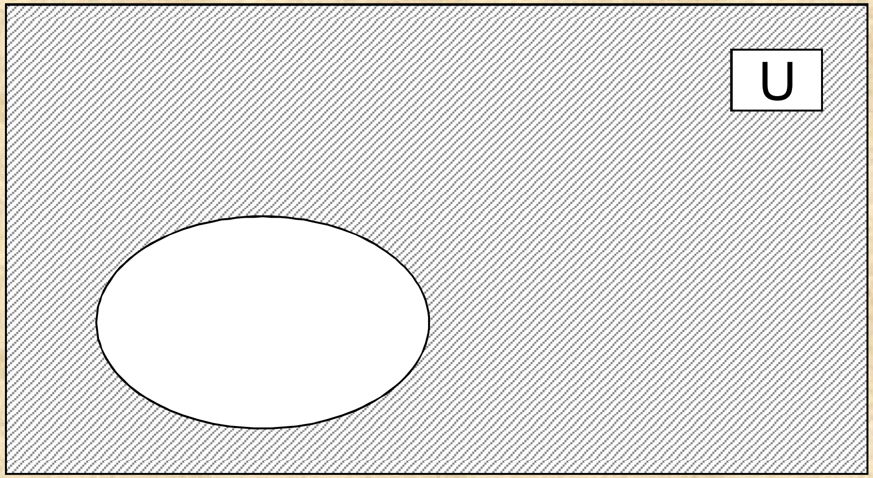
۱-۲-۱۸تعریف:

برای هرمجموعه Aبامجموعه جهانیU،مجموعه U-Aرا**مکمل** مجموعه Aمی نامیم

وبا نماد A' نشان می دهیم.پس

$$A' = \{x | x \in U \ , \ x \notin A\}$$

ناحیه سایه خورده در شکل ۱-۱۰ نشان دهنده مکمل مجموعه Aاست.



A'

شکل۱-۱۰

۱-۲-۱۹ مثال:

فرض می کنیم U مجموعه اعداد حقیقی A مجموعه تمام اعدادگنگ(یااصم)،و B مجموعه تمام اعدادگویا باشد.بنابر تعریف ۱-۲-۱۸ داریم

$$A' = U - A = \{x | x \in R \ , \ x \notin A\} = B$$

بنابراین A' برابر مجموعه اعداد گویاست.به همین ترتیب

$$B' = U - B = \{x | x \in R \ , \ x \notin B\} = A$$

۱-۲-۲۱ قضیه:

اگر A و B زیرمجموعه از مجموعه جهانی U باشند،آنگاه

الف) $\phi' = U$

ب) $U' = \phi$

پ) $(A')' = A$

ت) $A \subseteq B$, آنگاه $B' \subseteq A'$ وبرعکس

۱-۲-۲۲ قضیه قوانین دمورگان:

اگر A وB زیرمجموعه هایی از مجموعه جهانیU باشند،آنگاه

الف) $(A\cup B)' = A\cup B$

ب) $(A\cap B)' = A\cap B$

۱-۲-۲۴ قضیه تعمیم قوانین دمورگان

اگر مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ زیرمجموعه ای از مجموعه جهانیU باشند، آنگاه

الف) $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)' = A_1'\cup A_2'\cup\ldots\cup A_n'$

ب) $(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)' = A_1'\cap A_2'\cap\ldots\cap A_n'$

۱-۲-۲۸تعریف:

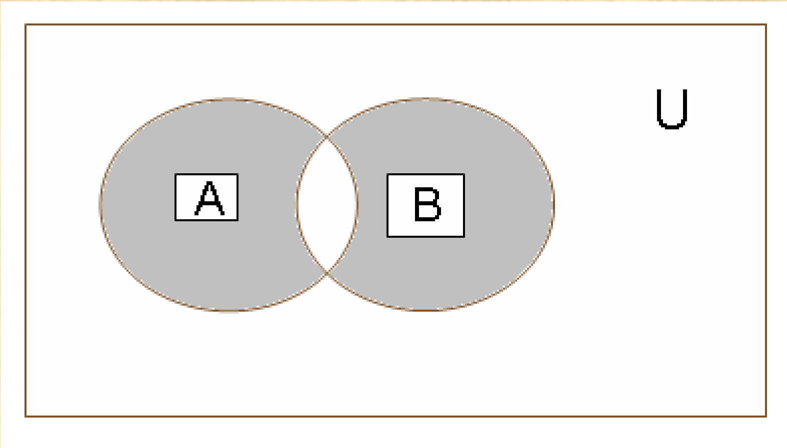
فرض می کنیم AوB دو مجموعه باشند. مجموعه تمام عضو هایی راکه تنهابه A
یا تنها به B تعلق دارند،**تفاضل متقارن AوB** می نامیم وبانماد $A\Delta B$

نشان می دهِم. به بیان دیگر

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

تساوی بالا، دلیل انتخاب نام تفاضل متقارن برای $A\Delta B$انشان می دهد،زیرا

تفاضل متقارن AوB برابربا اجتماع دو تفاضل A-Bو B-Aاست.



درشکل ۱-۱۲ ناحیه سایه خورده

$A\Delta B$نشان داده شده است.

۱-۳حاصل ضرب دکارتي مجــموعه ها

پیش ازاینکه به تعریف حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه بپردازیم،مفهوم

زوج های مرتب را یادآوری می کنیم.

۱-۳-۱تعریف:

دوتایی (a,b) راکه درآن ترتیب عناصرمطرح است،یک دوتایی مرتب یا زوج

مرتب یا جفت مرتب می نامیم.در زوج مرتب (a,b) ، aرامولفه اول وbرامولفه دوم می گوییم.

۱-۳-۲تعریف:

دو زوج مرتب (a,b) و(c,d)**رامساوی یا برابر** می گوییم،اگروتنها اگر داشته باشیم

$$a=c \quad ,b=d$$

۱-۳-۵ تعریف:

فرض می کنیم A و B دو مجموعه ناتهی دلبخواه باشند. **حاصل ضرب دکارتی**

A و B که با نماد $\mathbf{A \times B}$ نشان داده می شود، عبارتست از مجموعه تمام زوج های

مرتبی به صورت (a,b) که درآن $a \in A$ و $b \in B$. یعنی

$$\mathbf{A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}}$$

✪ توجه کنید که هرعضو مجموعه $A \times B$ یک زوج مرتب است.

۱-۳-۶مثال:

فرض می کنیم $A=\{1, 2, 3\}$ و $B=\{g, h\}$.بنابر ۱-۳-۵ حاصل ضرب دکارتی

$A \times B$ عبارتست از

$$A \times B = \{(1,g),(1,h),(2,g),(2,h),(3,g),(3,h)\}$$

حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ برابراست با

$$B \times A = \{(g,1),(g,2),(g,3),(h,1),(h,2),(h,3)\}$$

به طوری که مشاهده می کنیم ، حاصل ضرب های دکارتی $A \times B$ و $B \times A$

لزوما"برابرنیستند.

۴-۱تعداد عضوها و افراز یک مجـــموعه

۱-۴-۲قــــرارداد:

تعدادعضو های مجموعه متناهی A رابا نماد **n(A)** نشان می دهیم.

- مجموعه تهی یک مجموعه متناهی محسوب می شود.

۱-۴-۱تعریف:

مجموعه ای که تعداد اعضای آن متناهی باشد، مجموعه متناهی یابا پایان نامیده می شود. مجموعه ای که متناهـی نباشد،نامتناهی یا بی پایان نامیده می شود.

۱-۴-۳مثال:

الف) مجموعه $\{1, 3, 7, 9,11\}$ متناهی است زیرادارای ۵عضو است.

ب) مجموعه $\{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}$ متناهي است .

پ) مجموعه $[0,1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ نامتناهی است.

ت) هریک از مجموعه های اعداد طبیعی، صحیح،گویا،گنگ،وحقیقی

نامتناهی است.

ث) بازه (a,b) که a<b،مجموعه ای نامتناهی است.

۱-۴-۵ قضیه:

فرض می کنیم A وB وC سه مجموعه دلخواه باشند،همواره داریم

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

ب) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

پ) $n(A\Delta B)=n(A-B)+n(B-A)$

۱-۴-۶مثال:

فرض کنید مجموعه A دارای ۴۰ عضو ومجموعه B دارای ۳۵عضو است

که ۱۰ عضو آنها در AوB مشترک هستند. مجموعه $A\cup B$چند عضو دارد؟

حل:

چون $n(A\cap B)=10$ بنابر ۱-۴-۵(الف) داریم

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=45+35-10=65$$

۱-۴-۱۰تعریف:

مجموعه ناتهی A رادرنظر می گیریم. مجموعه های ناتهی $A_1, A_2, \ldots, A_n$

رایک **افراز** مجموعه A می نامیم،درصورتی که:

الف) مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ دو به دو ازهم جداباشند،به

بیان دیگر به ازای هر i و j که $i \neq j$ داشته باشیم

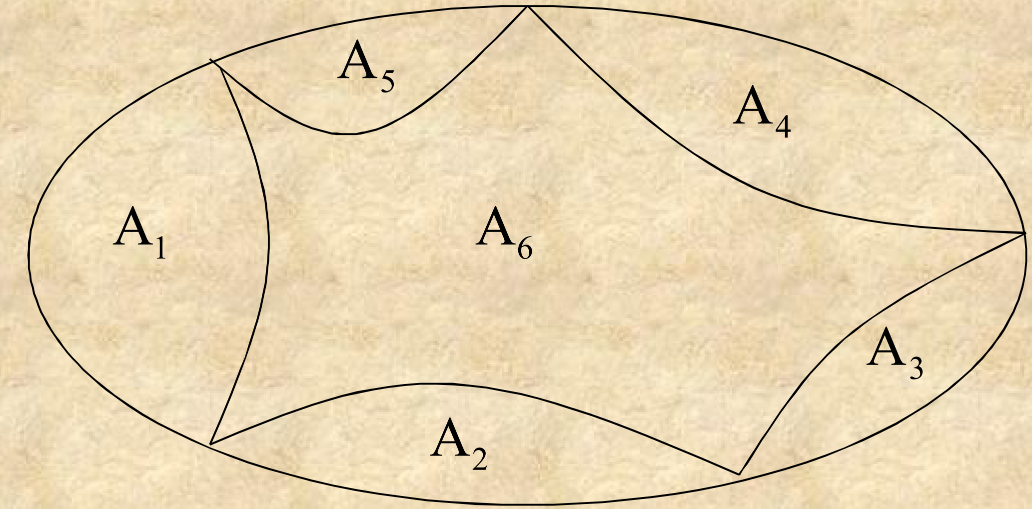
$$A_i \cap A_j = \phi$$

ب) اجتماع مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مساوی A باشد ، یعنی

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

درشکل ۱-۱۵ افراز مجموعه A به شش مجموعه $A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$

نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۵

فصل دوم

دستگاههای مختصات

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که بادستگاههای مختصات دکارتی وقطبی آشنا شوید،

ومعادلات خطوط رابشناسید ونمودار آنهارارسم کنید.

هدف های رفتاری:

ازشما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱. مختصات دکارتی هر نقطه رادر صفحه مختصات تعیین کنید.

۲. باداشتن مختصات دکارتی یک نقطه ،موضع نقطه را در صفحه معین کنید.

۳. فاصله دو نقطه رادر صفحه مختصات محاسبه کنید.

۴. مختصات وسط یک پاره خط را با داشتن مختصات ابتدا وانتهای پاره خط پیدا کنید.

۵. مختصات محل تلاقی سه میانه مثلث رابا دانستن مختصات دکارتی راس هایمثلث محاسبه کنید.

۶. مختصات نقطــه رادر دستگاهی که محور های آن به موازات خود انتقال یافته اند،تعیین کنید.

۷. مــعادله خـط را با استفاده از داده های مسئله بنویسید.

۸.شیب خط راتعریف کنید،رابطه بین شیب های خطوط موازی ،متعامد،ومتقاطع

را بلد باشید درحل مسائل به کاربرید.

۹. نمودار خط هایی را که معادلهآنها داده شده است،رسم کنید.

۱۰.عـرض ازمبدا وطـول ازمبدا خــط هاراتعیین کنید.

۱۱.فاصــله یک نقطـــه راز یک خـــط محاسبه کنید.

۱۲. فاصله دو خط موازی راتعیین کنید.

۱۳. مختصات نقطه تلاقی دو خط رابیابید.

۱۴. دستگاه مختصات قطبی را تعریف کنیدونحوه تعیین مختصات قطبی یک نقطه رابیان کنید.

۱۵. رابطــه بین مختصات دکارتی و مختصات قطبی یک نقطه رابدانید ودر حل مسائل به کاربرید.

مقدمه

دراین فصل ابتدا به معرفی دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات قطبی می پردازیم وسپس رابطه بین این دو دستگاه رابررسی می کنیم.

۱-۲دستگاه مختصات دکارتی

۲-۱-۱تعریف:

در صفحه هندسی ،یک خط مستقیم افقی رسم می کنیم.درروی این خط، نقطه دلخواه O رابه عنوان مبدا وطولی رابه عنوان واحد طول اختیار می کنیم.اکنون این خط رابر حسب این واحد طول به ترتیب اسلاید بعدی مدرج می کنیم:

الف) نقطه O ،یعنی مبدا رابه عنوان نمایش عددصفر اختیار می کنیم.

ب) اگر $a>0$، نقطه ای رابه فاصله aبرابرواحد طول درسمت راست مبدا به عنوان نمایش aاختیار می کنیم .

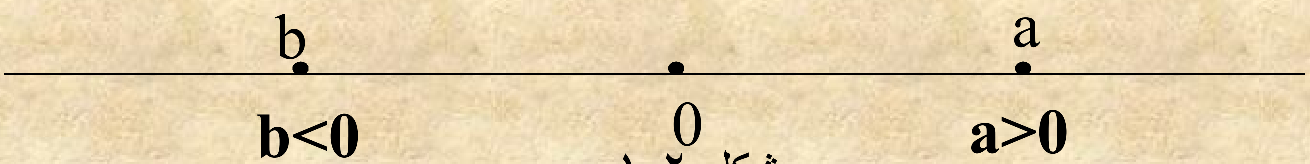
پ) اگر $b<0$،نقطه ای رابه فاصله b–برابرواحدطول درسمت چپ مبدا به عنوان نمایش bاختیارمی کنیم.

به این ترتیب ،نقاطی ازخط افقی که نمایش اعداد مثبت هستند درسمت راست نقطه O

ونقاطی که نمایش اعداد منفی هستند،درسمت چــپ مبدا قراردارند.بنابراین،خط

جهت داری به دست می کنیم آوریم که نمایش اعداد حقیقی است.این خط جهت دار

رامحور طول ها یا محور xها می کنیم نامیم.به شکل ۲-۱ نگاه کنید.



شکل ۲-۱

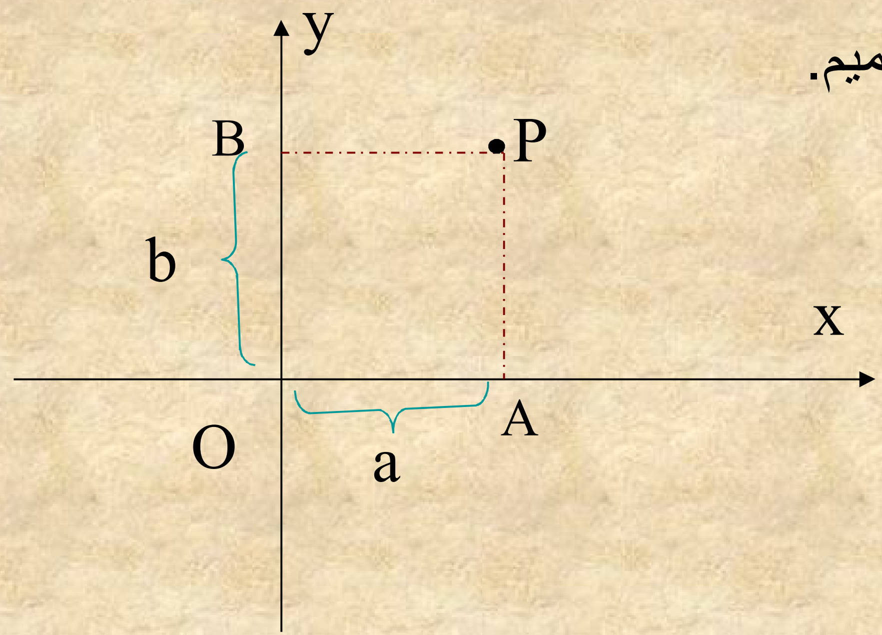
۲-۱-۲ مختصات نقطه در صفحه:

فرض می کنیم P نقطه دلخواهی در صفحه هندسهxoy باشد.

درشکل ۲-۳،خطوط PA و PB رابه ترتیب عمودبرمحور xها وعمود بر محور yها

رسم می کنیم .اندازه جبری oA روی محورxها را طول نقطه P واندازه جبری oB

روی محور yها را عرض نقطه P می نامیم.

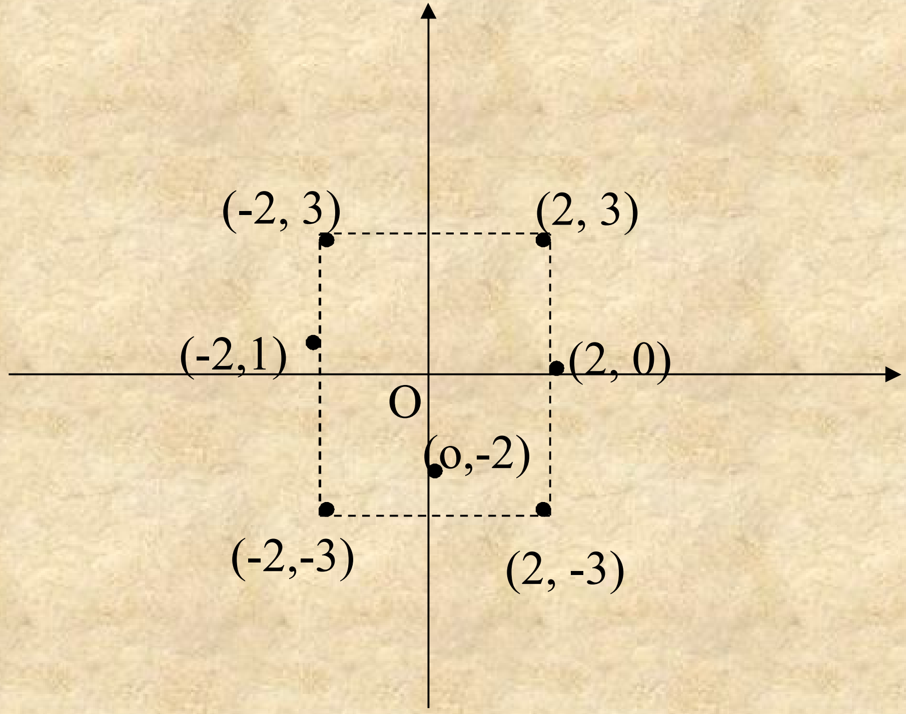


درنتیجه یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه وزوج هایی مانند(a,b)،که

در آن aو b اعدادحقیقی اند وجوددارد.بنابراین می توان صفحه xoy رابا

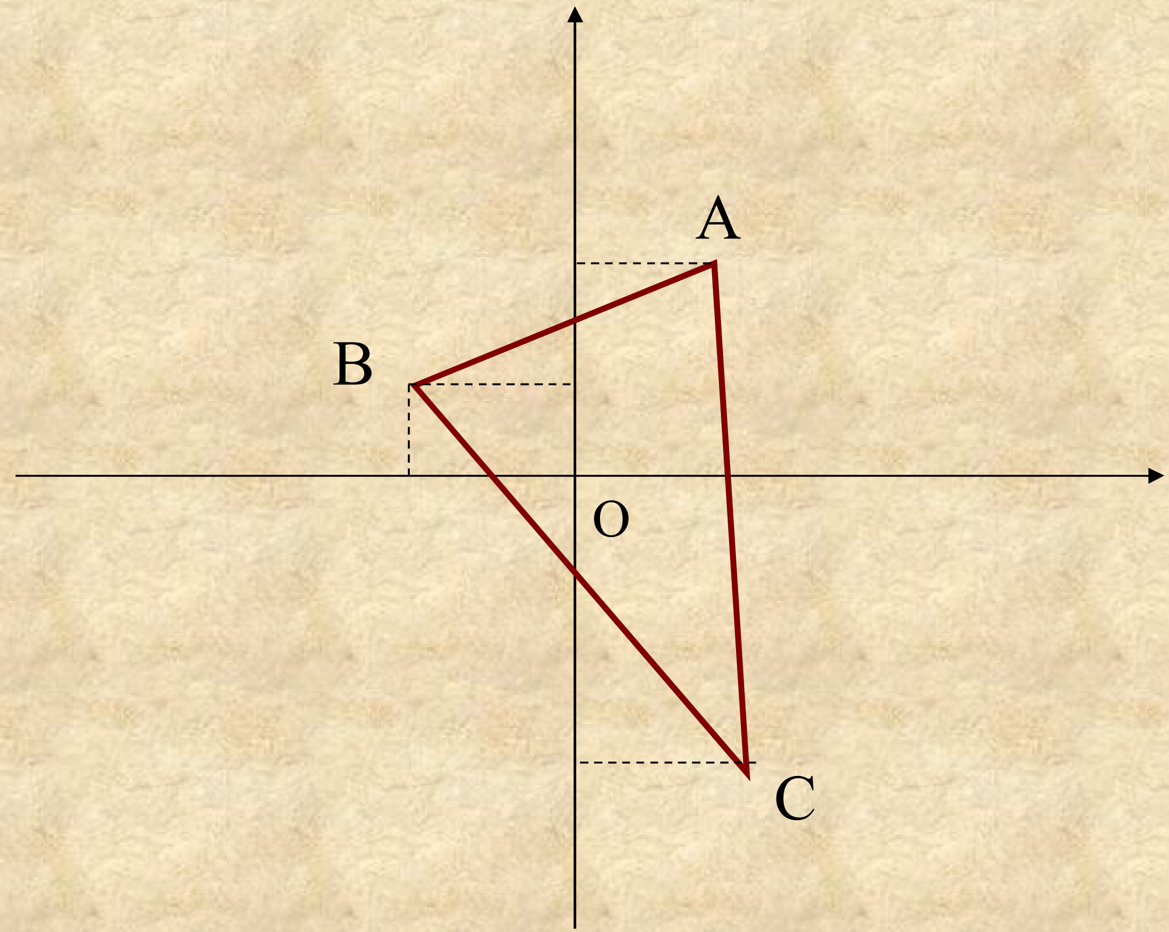
مجموعه $R^2 = R \times R$ یکی گرفت.درشکل ۲-۴،یک دستگاه مختصات

دکارتی وچند نقطه درآن نشان داده شده است.



۲-۱-۴مثال:

مثلثی رسم کنیدکه مختصات راس های آن (A(2, 2،(B(-1, 1و(C(1, -3 باشد.



۲-۱-۵فاصله دو نقطه :

فرض می کنیم A نقطه به مختصات (x_A, y_A) و B نقطه به مختصات (x_B, y_B) باشد.فاصله دو نقطه A و Bرامساوی طول پاره خط ABتعریف می کنیم وبا نماد d(A,B) نشان می دهیم. می توان ثابت کرد که فاصله میان A و B از رابطه زیربه دست می آید.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

۲-۱-۷ مختصات وسط پاره خط:

دو نقطه A و B را به ترتیب با مختصات (x_A, y_A) و (x_B, y_B) در صفحه در نظر می گیریم .اگر C نقطه وسط پاره خط AB باشد، آنگاه مختصات نقطه Cبرابراست با

$$x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y_C = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

۲-۱-۸مثال:

مختصات نقطه وسط پاره خط BCدر مثال ۲-۱-۴ راتعیین کنید.

حل:

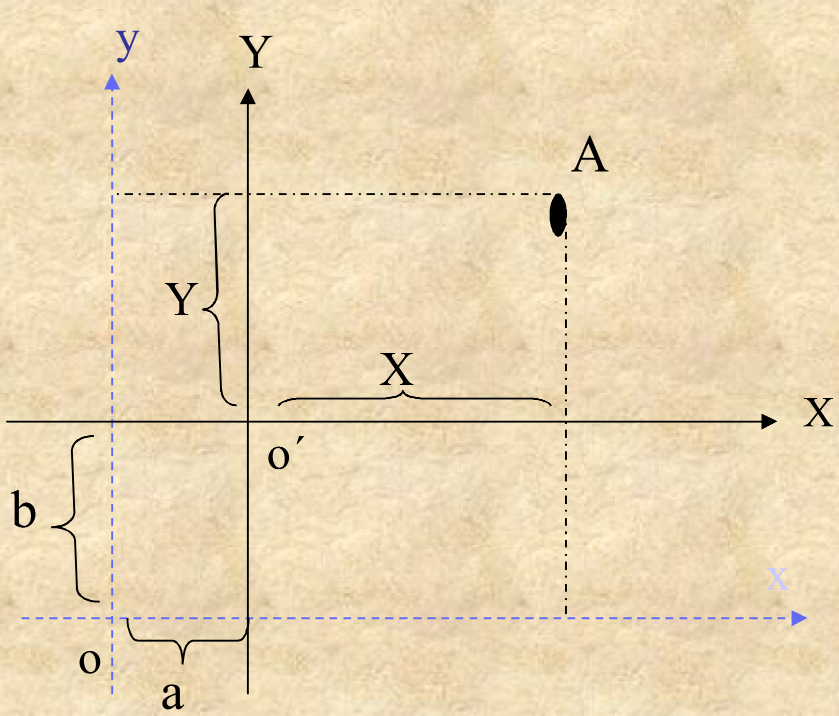
فرض می کنیم D، نقطه وسط پاره خط BCباشد،بنابر۲-۱-۷داریم

$$x_D = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$y_D = \frac{1}{2}(-3+1) = -1$$

بنابراین مختصات نقطه D،(0, -1) است.

۲-۱-۱۲ انتقال محورهای مختصات :



$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

۲-۲معادله ونمودار خط

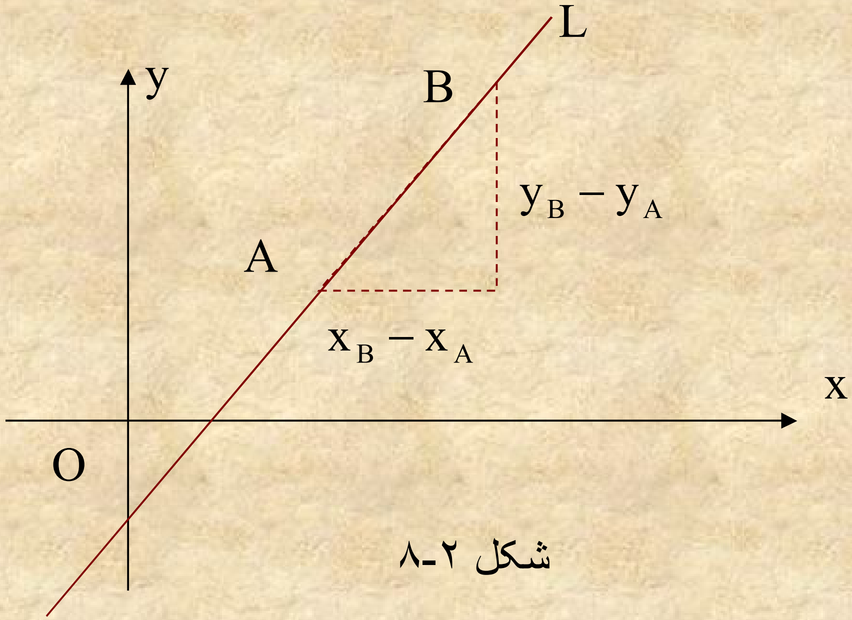
۲-۲-۱مقدمه:

خط راست Lراکه،موازی محور yها نیست(خط غیر قائم)،درنظر می گیریم.اگر

Aو B دو نقطه متمایز دلخواه روی خط Lباشند،آنگاه شیب یاضریب زاویه خط

رابا حرف mنشان می دهیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



شکل ۲-۸

✪دقت کنید که شیب خط بستگی به نقاطی که برای محاسبه آن انتخاب می کنیم

ندارد،وبرای تمام نقاط روی هر خط مقداری ثابت است.(چرا؟)

۲-۲-۳ مثال:

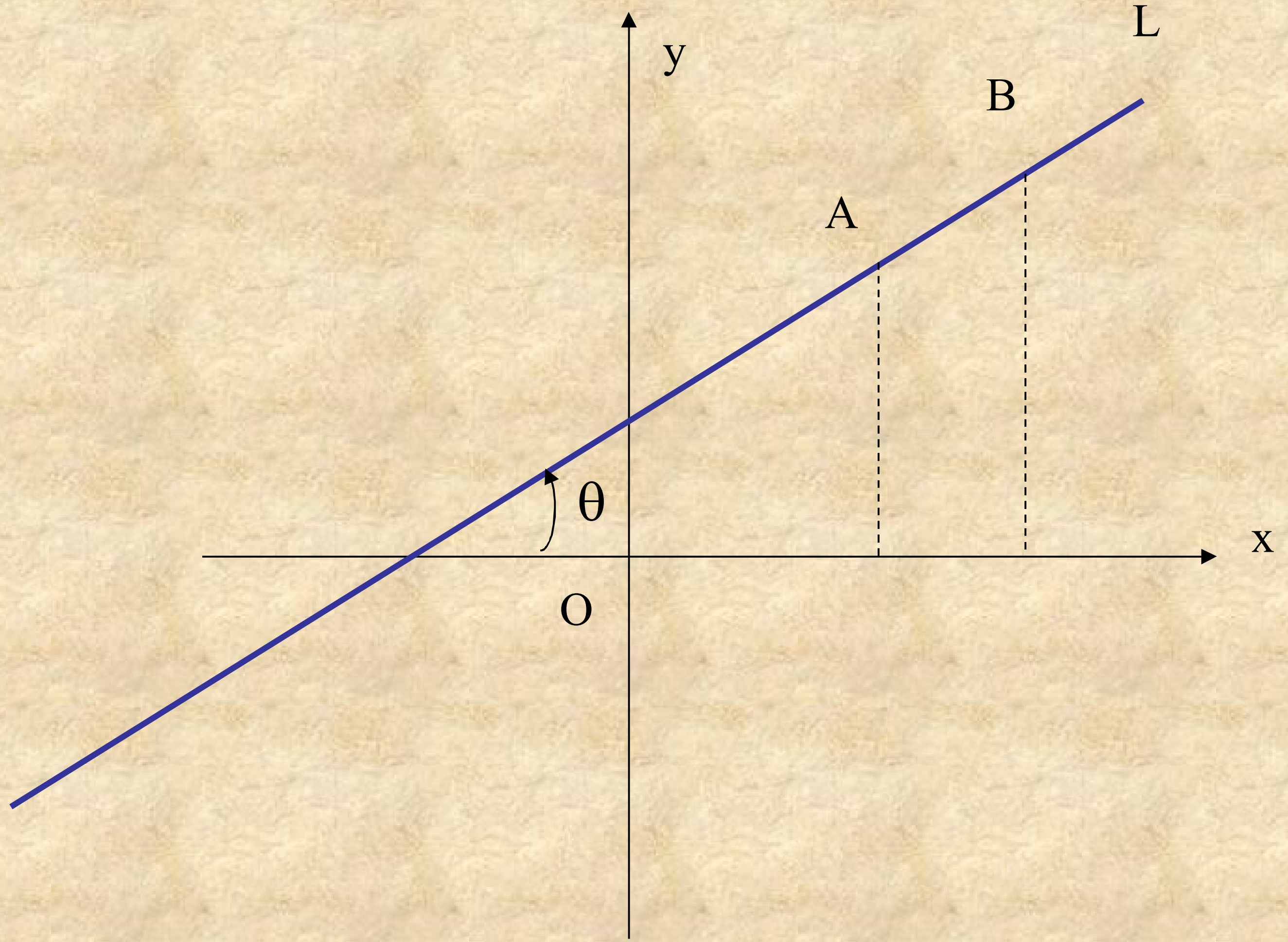
شیب خطی که ازدو نقطه $A(2,-3)$ و $B(4, 1)$ می گذرد برابراست با

$$m = \frac{1-(-3)}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

۲-۲-۴نکته:

شیب خط Lرا می توان به **تانژانت زاویه ای که این خط** با جهت مثبت محور
X
هامی سازد نیزتعبیر کرد.به بیان دیگر

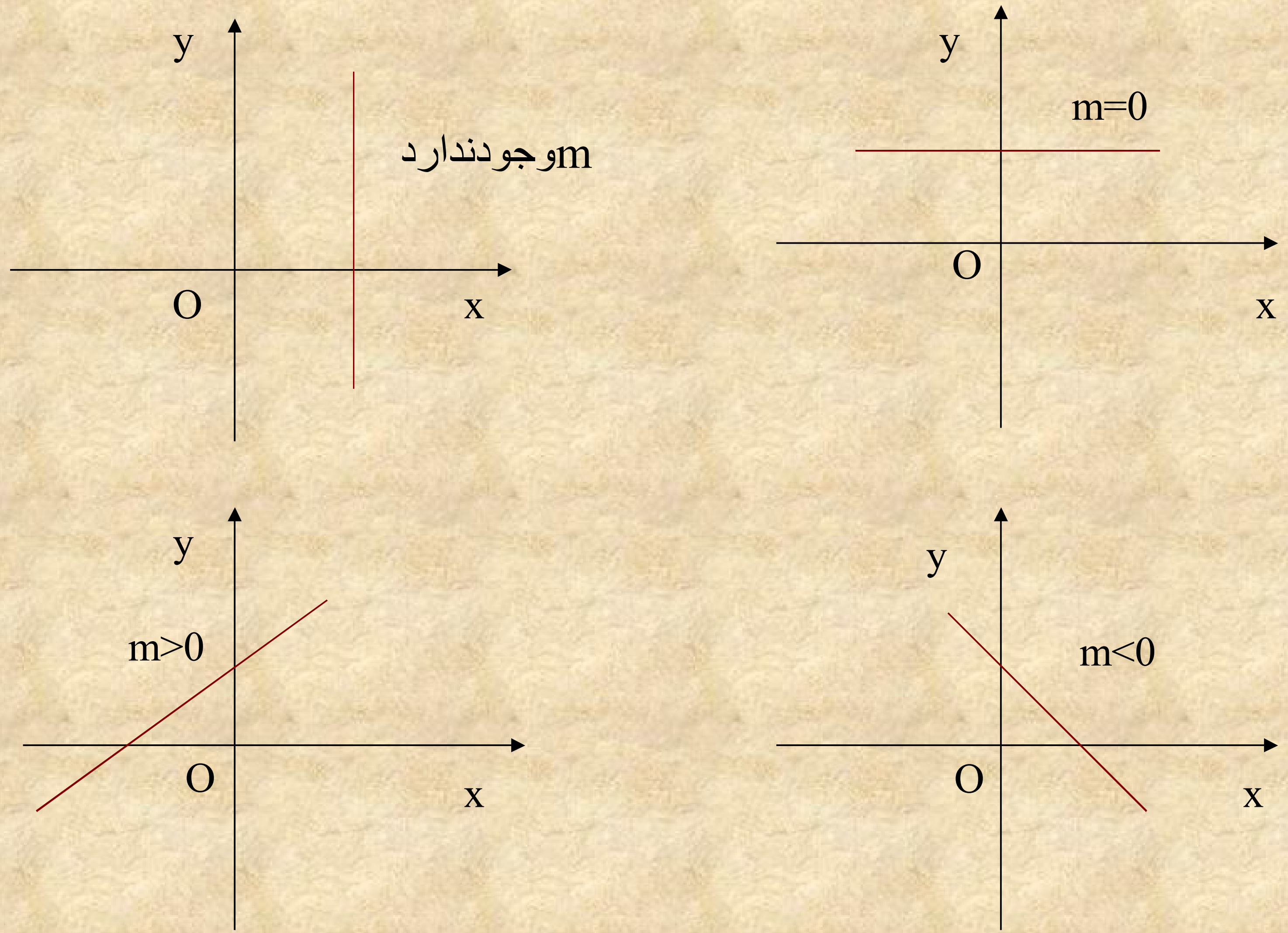
$$\mathbf{m = \tan\theta}$$



دراین جا $0^\circ \le \theta \le 180$ زاویه ای است که خط L باجهت مثبت محور xها

می سازد.

به شکل های ۲-۱۰توجه کنید.



شکل های ۲-۱۰

۲-۲-۶ قضیه:

سه نقطه Aو B و Cبرروی یک خط واقع اند اگروتنها اگر شیب های خطوط AB وBCمساوی باشند،به عبارت دیگر داشته باشیم

$$m_{AB} = m_{BC}$$

۲-۲-۷ مثال:

عدد aرا چنان تعیین کنید که سه نقطه $A(1,-1)$, $B(0, 2)$, $C(a,-2a)$،برروی یک خط راست واقع باشند.

حل:

بنابرقضیه ۲-۲-۶بایدداشته باشیم

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{2-(-1)}{0-1} = \frac{-2a-2}{a-0} \Rightarrow 3a = 2a + 2$$

درنتیجه $a=2$.

۲-۲-۹ قضیه (شرط توازی وتعامد دوخط):

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های خط های L_1 و L_2 باشند.

الف) دوخط L_1 و L_2 متوازی اند اگروتنها اگر $m_1 = m_2$.

ب) دوخط L_1 و L_2 برهم عمودند اگر وتنها اگر $m_1 m_2 = -1$.

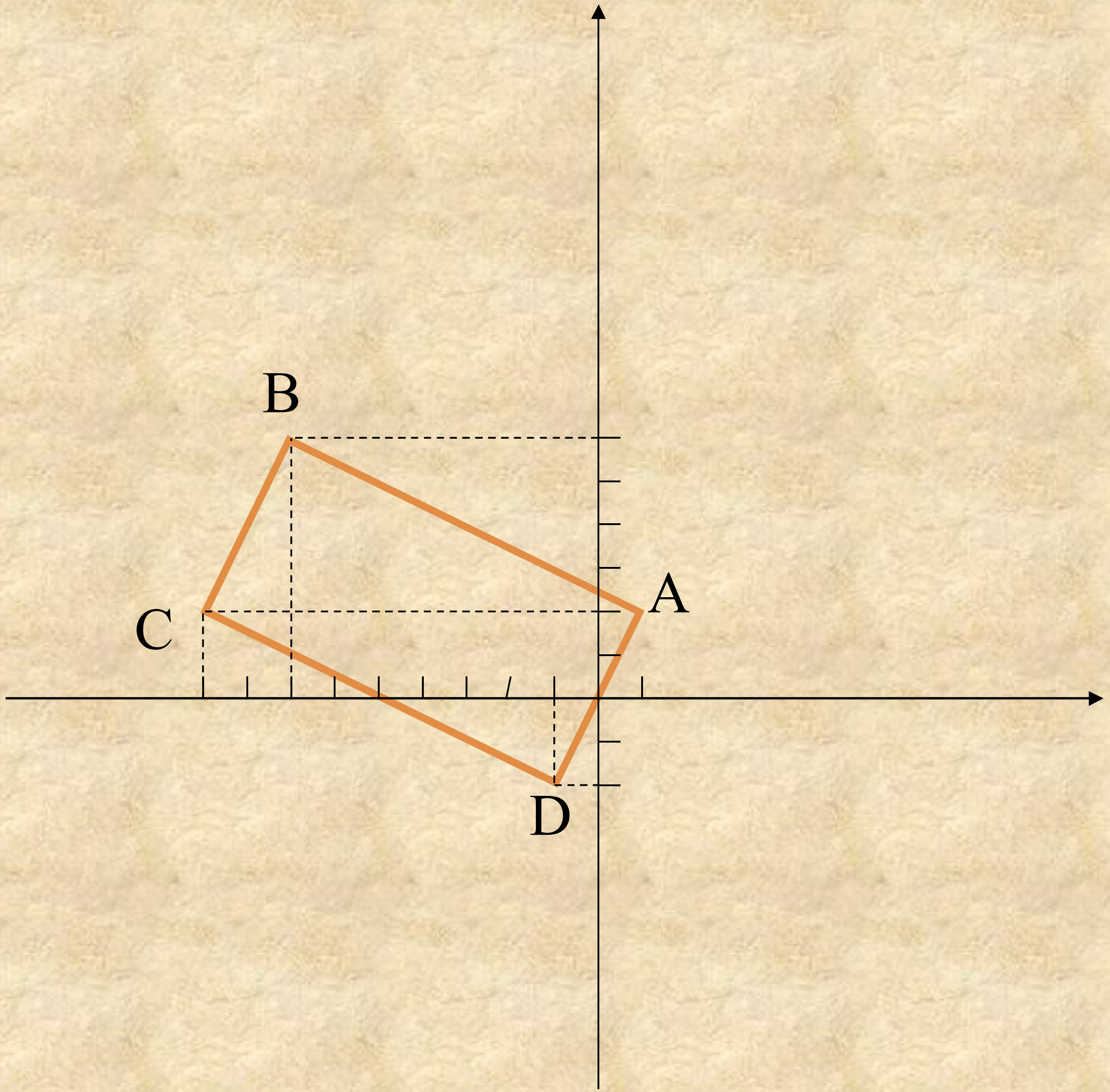
۲-۲-۱۰ مثال:

نشان بدهید که چهار نقطه A(1,2), B(-7,6) , C(-9,2) , D(-1,-2)، راس های یک مستطیل اند.

حل:

می دانیم مستطیل یک چهار ضلعی است که درآن اضلاع دو به دو برهم عمودند

واضلاع روبه رو با هم مساوی ومتوازی اند،به شکل۲-۱۱دراسلاید بعدی توجه کنید.



$$m_{AD} = \frac{-2-2}{-1-1} = 2$$

$$m_{AB} = \frac{2-6}{1+7} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{2-6}{-9+7} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{-2-2}{-1+9} = -\frac{1}{2}$$

✪ازآن جا که $m_{AD}.m_{AB}=-1$ و $m_{CD}.m_{BC}=-1$، خطوط AB وAD و همچنین

خطوط BC وCD دوبه دو بر هم عمود ند.

✪ازطرفی چون $m_{AD}=m_{BC}$ و $m_{CD}=m_{AB}$ دوخط AD وBC باهم ودوخط AB

وCD باهم متوازی اند.

از مطالب بالا نتیجه می شود که چهار ضلعی ABCD،مستطیل است.

۲-۲-۱۲ زاویه بین دو خط :

فرض می کنیم m_1 و m_2 به ترتیب شیب های دو خط L_1 و L_2 باشند. زاویه

بین دو خط ، α،ازرابطه زیربه دست می آید.

$$\tan\alpha=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

۲-۲-۱۵ معادله خط راست:

فرض می کنیم $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایزروی خط L باشند. اگر

$P(x,y)$ نقطه دلخواهی از خط L باشدآنگاه برحسب اینکه خط L قائم باشد یا نه،

معادله خط L عبارت است از:

حالت اول) اگر خط L قائم نباشد،یعنی $x_1 \neq x_2$ آنگاه معادله خط L برابراست با

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

یا

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

حالت دوم) اگر خط L قائم باشد،یعنی $x_1 = x_2$ آ نگاه معادله خط قائم L عبارت است از

$$\mathbf{x = x_1}$$

۲-۲-۱۶مثال:

معادله خطی رابنویسید که ازدو نقطه $(3, 4)$و$(-5, 2)$می گذرد.

حل:

شیب خط برابراست با

$$m = \frac{4-2}{3+5} = \frac{1}{4}$$

معادله خط بنابر ۲-۲-۱۵ (الف)عبارت است از

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$x - 4y + 13 = 0$$

۲-۲-۱۸ نکته:

به طور کلی هر معادله ای به صورت $Ax+By+C=0$،که درآن اعدادحقیقی

AوB هردو باهم صفر نباشند، نمایشگر یک خط راست است. این معادله راکه

شامل توان های اول xوyاست،برحسب x و y، **خطی** می نامیم.

بنابراین هر خط راست در صفحه به وسیله یک معادله خطی مشخص می شودو

معادله خطی معرف یک خط راست است.

۲-۲-۱۹طول و عرض از مبدا خط:

معادله خطی $Ax+By+c=0$،راکه درآن اعدادحقیقی A و B هردو باهم صفر

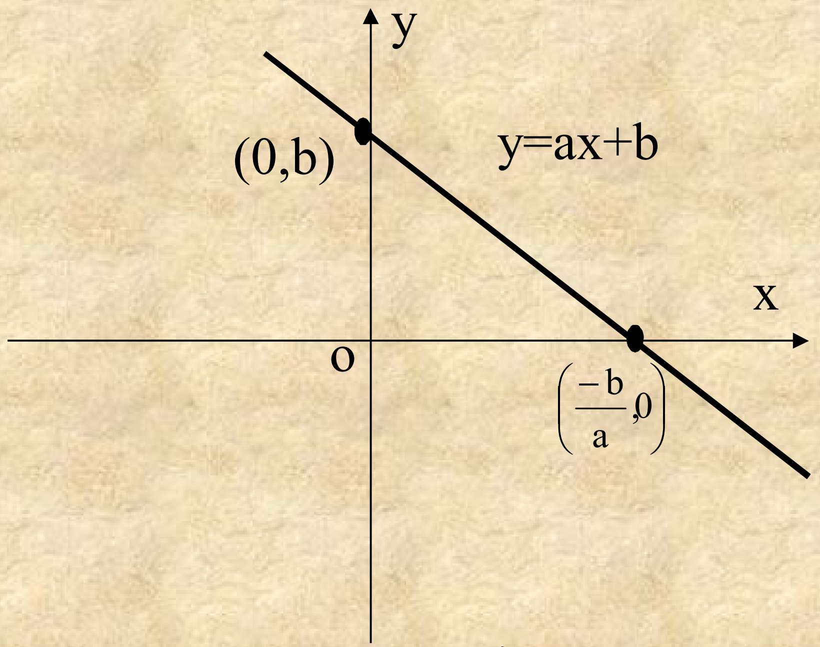
نیستند،می توانیم به صورت زیربنویسیم:

$$y=ax+b$$

که درآن bرا عرض از مبدا خط و $\frac{-b}{a}$را طول ازمبدا خط می نامیم.

توجه کنید که اعدادحقیقی bو $\frac{-b}{a}$به ترتیب به ازای $x=0$ و $y=0$از معادله

$y=ax+b$، به دست می آیند.به شکل ۲-۱۲ نگاه کنید.



درحقیقت $(0,b)$،نقطه ای است که درآ«خط مورد نظر با محور yها تلاقی می کند

و $\left(\frac{-b}{a},0\right)$ نیز نقطه است که درآن خط مورد نظر محور xها را قطع می کند.

در معادله $y=ax+b$،شیب خط برابر aاست .چون این معادله برحسب a،شیب ،وb،

عرض از مبدا خط ،نوشته شده است،آن را **معادله شیب و عــرض از مبدا خط** می نامیم.

۲-۲-۲۳مثال:

نمودار خطی با معادله $y = -\frac{2}{3}x + 2$ را رسم کنید.

حل:

چون معادله خط به صورت شیب و عرض از مبدا داده شده است،لذا تعیین نقاط

تلاقي خط با محور های مختصات ،یعنی عرض از مبدا از مبدا وطول از مبدا خط،

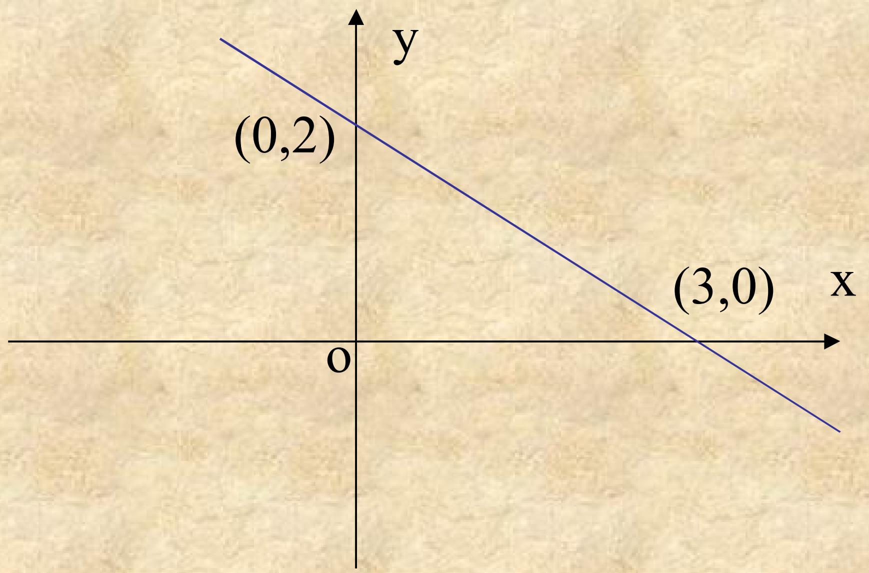
ساده است. داریم:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

چون دو نقطه $(0,2)$و$(3,0)$ روی این خط قراردارند،خطی که این دو نقطه را به

هم وصل کند،نمودارخط داده شده است.این نمودار درشکل ۲-۱۳ نشان داده شده است.



۲-۲-۲۶ فاصله یک نقطه از یک خط:

فاصله نقطه $P(a,b)$ از خط L با معادله $Ax+By+c=0$ برابر است با:

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

۲-۲-۲۷ فاصله دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی با معادله های $Ax+By+C=0$ و $Ax+By+D=0$ برابر است با:

$$h=\frac{|C-D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

۲-۲-۳۱ مختصات نقطه تلاقی دو خط:

نقطه تلاقی دو خط، نقطه ای است که برهر دو خط واقع است.بنابراین اگر معادله های دو خط به صورت $Ax+By+C=0$ و $A'x+B'y+C'=0$ باشند، مختصات نقطه تلاقی این دو خط ،از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به دست می آید:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \end{cases}$$

۲-۲-۳۲مثال:

مختصات نقطه تلاقی دوخط با معادله های $3x-4y+6=0$ و $x-2y-3=0$ را به دست آورید.

حل:

بنابر ۲-۲-۳۱ باید دستگاه دو معادله دو مجهولی زیررا حل کنیم.

$$\begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

برای این کار، معادله دوم دستگاه بالا رادر (۳-)ضرب ونتیجه را با معادله اول

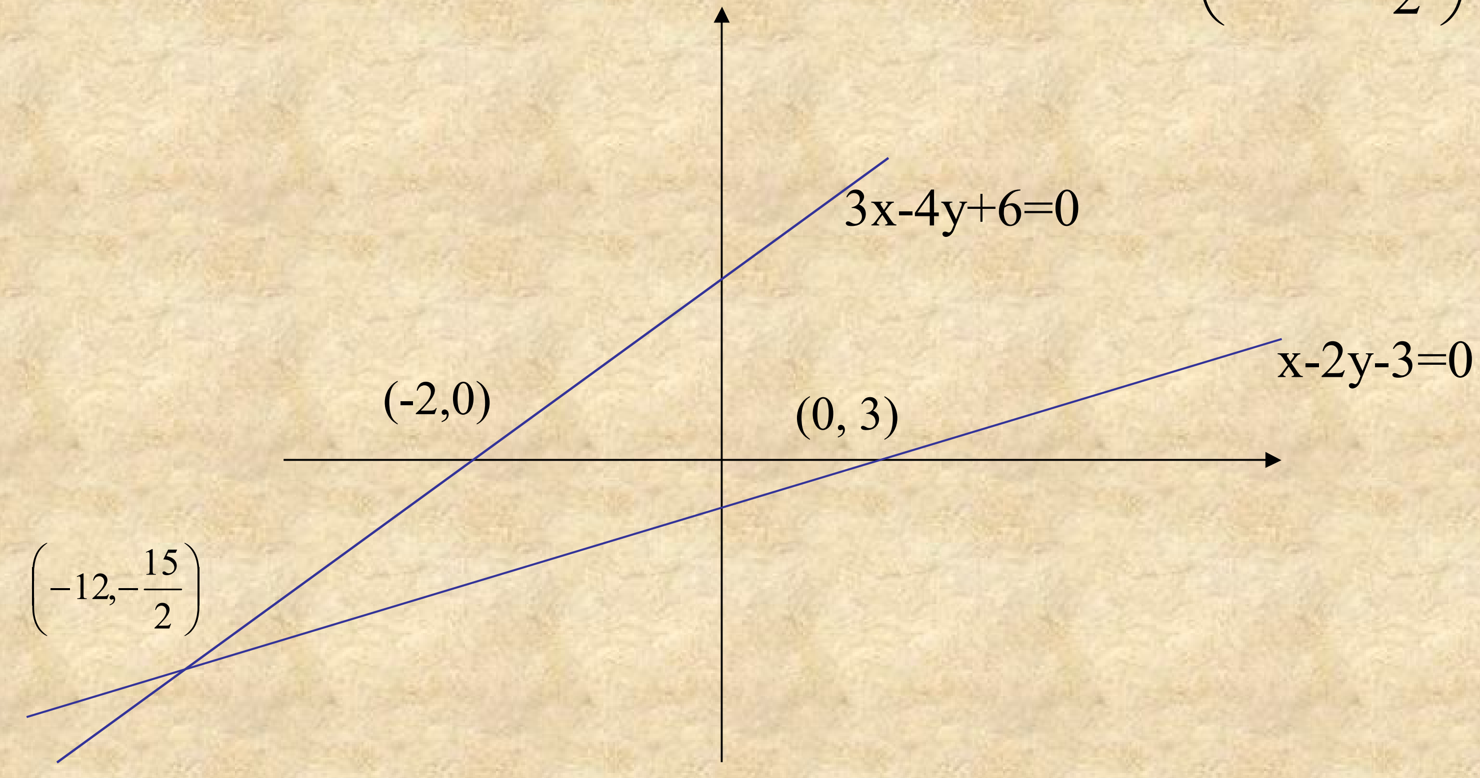
دستگاه جمع می کنیم،یعنی

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-4y+6=0 \\ -3x+6y+9=0 \end{cases} \\ \hline \quad 0+2y+15=0 \end{array}$$

در نتیجه، $y=-\frac{15}{2}$. با قرار دادن $y=-\frac{15}{2}$ در معادله دوم دستگاه به دست می آوریم

$$x-2\left(\frac{-15}{2}\right)-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=-12$$

بنا براین $\left(-12,-\frac{15}{2}\right)$ نقطه تلاقی دو خط است



۳-۲دستگاه مختصات قطبی

۲-۳-۱ مقدمه:

در بخش ۲-۱دیدیم که مکان یک نقطــه از صفحه را می توانیم با طول وعرض آن نقطه در دستگاه مختصات دکارتی مشخص کنیم.روش دیگری برای تعیین محل یک نقطه در صفحه وجوددارد که به کمک دستگاه مختصات قطبی انجام می شود.

دراین بخش ،دستگاه مختصات قطبــی را معرفــی می کنیم و سپس به بررسی مختصات قطبــی یک نقطه ورابطه آن با مختصات دکارتی آن نقطه می پردازیم.

۲-۳-۳ تعریف:

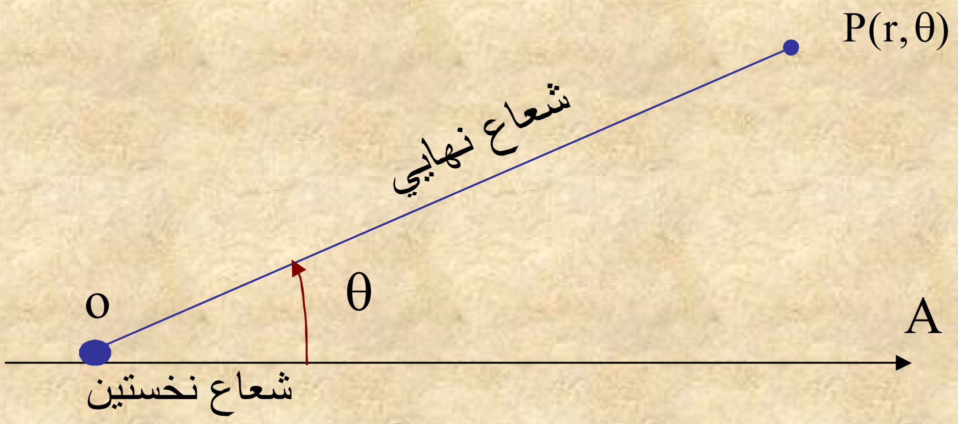
فرض می کنیم P نقطه ای ثابت باشد که بر o،قطب،منطبق نیست.اگر θ زاویه

جهت دار AoP باشد،oA را شعاع نخستین و oP را شعاع نهایی زاویه θ می نامیم.

جهت مثبت دراندازه گیری زاویه θ ،برخلاف عقربه های ساعت (پادساعتگرد)

در نظر گرفته می شود.اگر r فاصله جهت دار o از P ،باشد، زوج مرتب (r,θ)

مختصات قطبی نقطه P در صفحه می نامیم،ومی نویسیم $P(r,\theta)$، به شکل ۲-۱۶ نگاه کنید.



معمولا” زاویه θ برحسب درجه یا رادیان اندازه گیریمی شود.بین درجه ورادیان،

رابطه زیر برقراراست.

$$۱ \text{ درجه } = \frac{\pi}{180} \text{ رادیان}$$

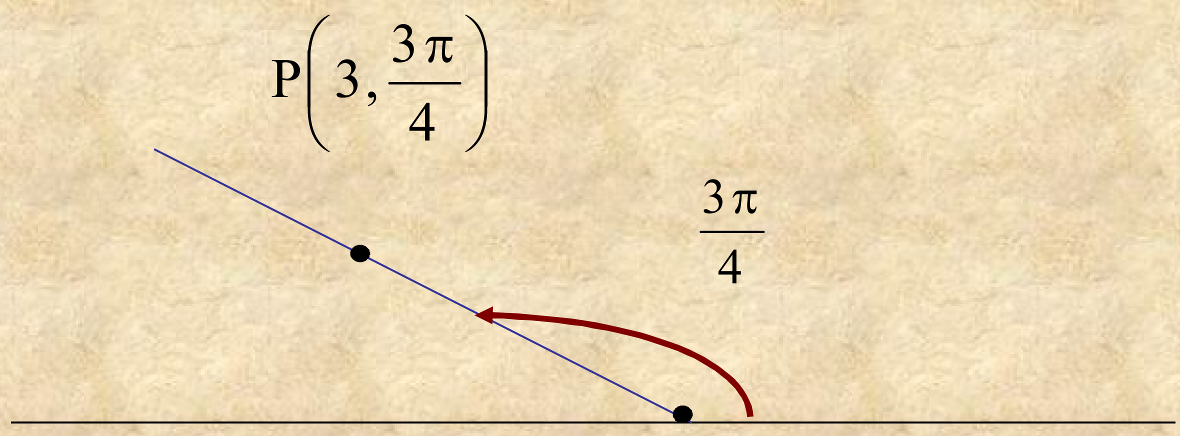
شعاع نهایی oPرا **شعاع حامل** نقطه Pنیز می نا مند.

۲-۳-۴مثال:

براي تعیین مکان نقطه Pبه مختصات قطبی $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ ،ابتدا نیم خطی از o

رسم می کنیم به طوریکه زاویه AoPبرابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد. نقطه ای که روی شعاع

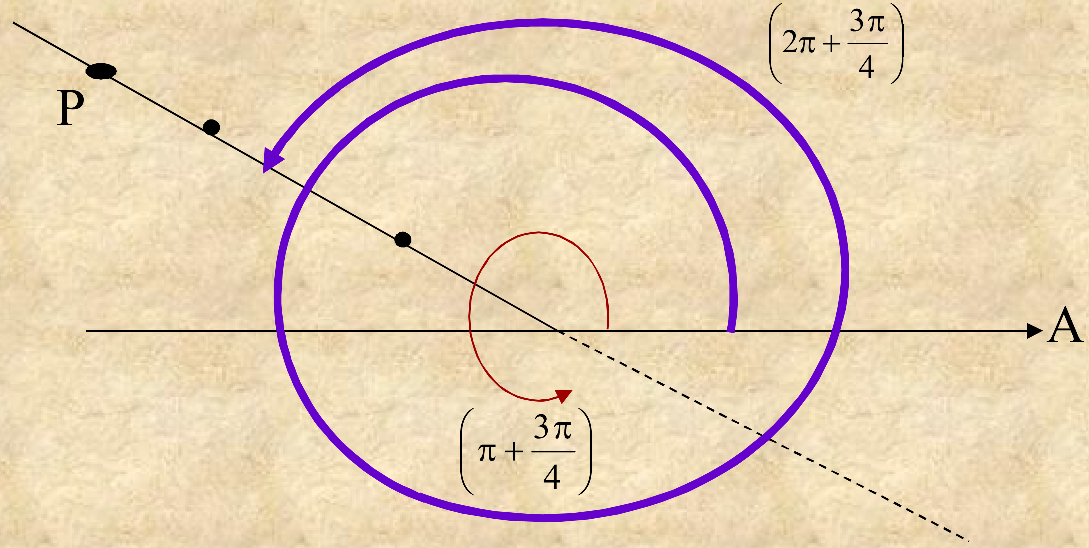
نهایی این زاویه و در فاصله ۳ از oقراردارد همان نقطه Pاست.


$P\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$

۲-۳-۵ نکته:

در دستگاه مختصات قطبی ،نقاط $\left(3,\frac{3\pi}{4}\right)$ ، $\left(-3,\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ و $\left(3,2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ وبه طور

کلی به ازلی هر عدد صحِح k،نقطه $\left(3(-1)^{k},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$ بر هم منطبق هستند.

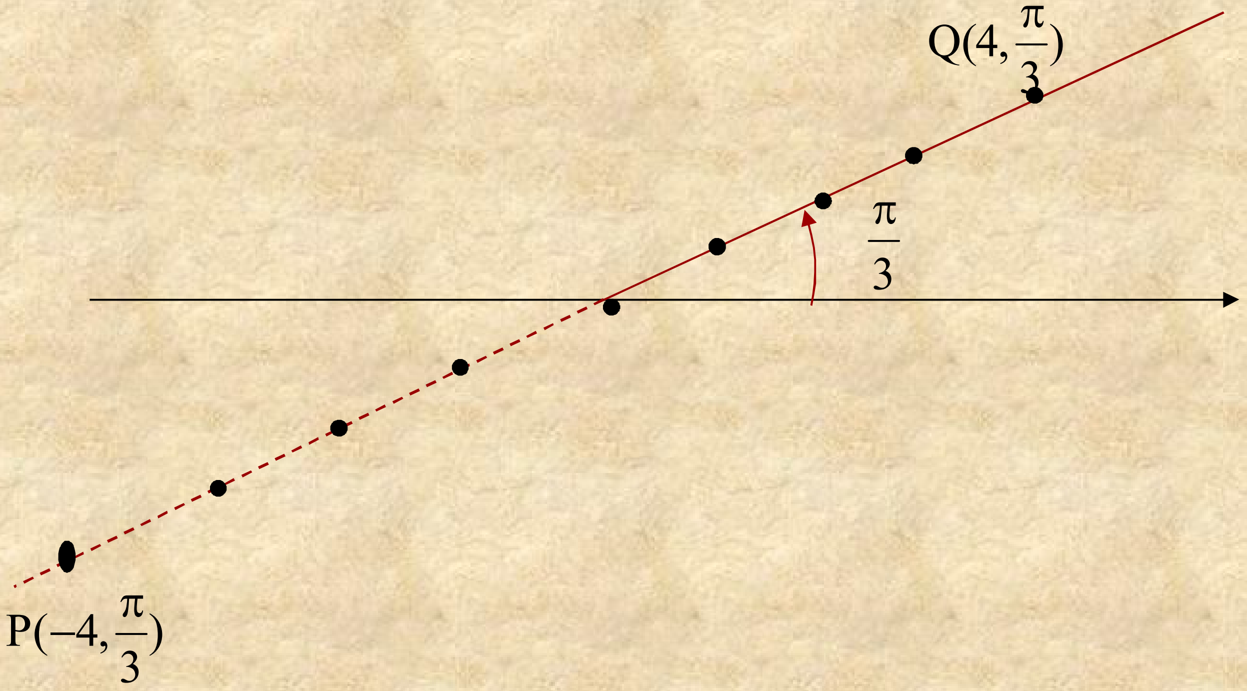


۲-۳-۶ نکته:

در مختصات قطبی ،عدد r می تواند منفی نیز باشد.دراین صورت نقطه P به جای

اینکه درروی شعاع نهایی زاویه θ باشد،درامتداد این شعاع ودرجهت مخالـف

به فاصله از o واقع است .



۲-۳-۱۱رابطه میان دستگاه مختصات دکارتی و قطبی :

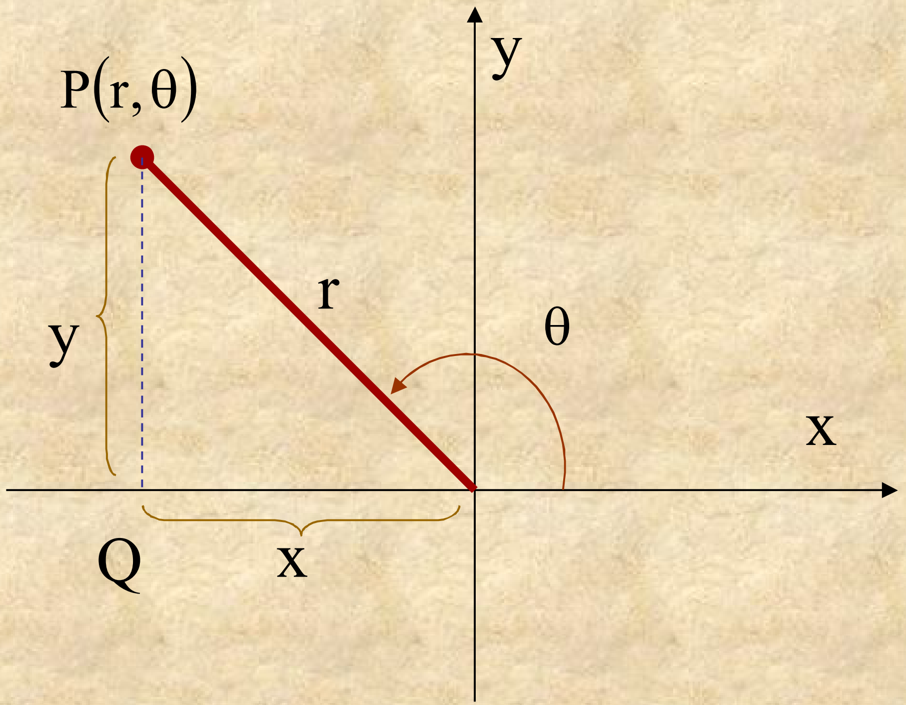
فرض می کنیم محورxها منطبق بر محور قطبی و o،مبدا دستگاه مختصات دکارتی روی قطب واقع باشد.محور yها را منطبق بر شعاع $\theta = \frac{\pi}{2}$ اختیار می کنیم.

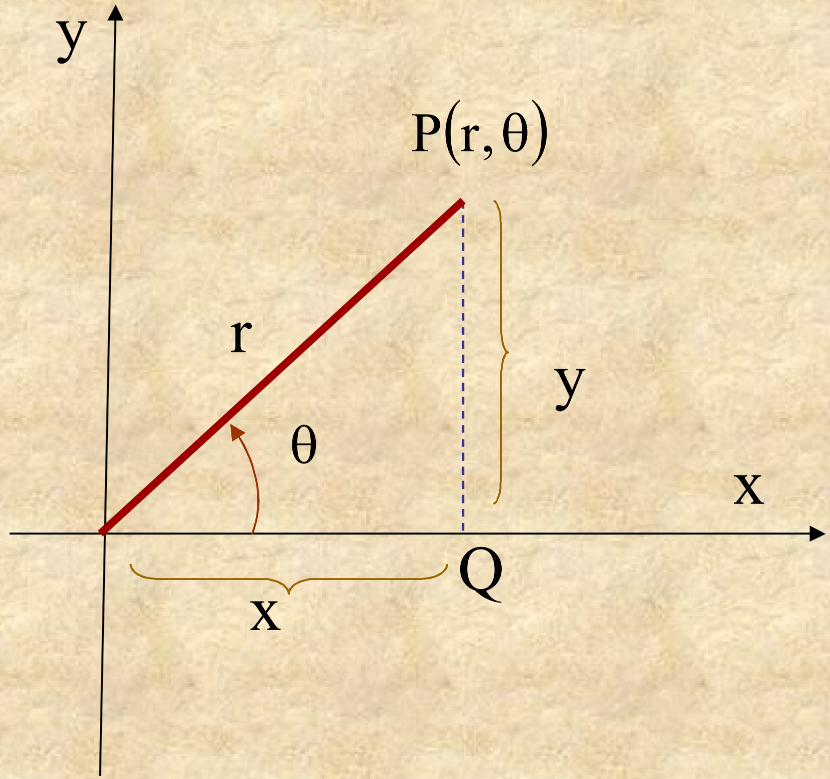
فرض می کنیم مختصات قطبی نقطه Pنسبت به محور ox وقطب o،زوج مرتب (r,θ) و مختصات دکارتی این نقطه نسبت به دستگاه مختصات دکارتی xoy، زوج مرتب (z,y)باشد.در تعیین رابطه بین r, y, x وθ بسته به علامت rدو حالت تشخیص می دهیم:

۱)اگر $r>0$،نقطه P رویشعاع نهایی زاویه θواقع لست.به طوری که درشکل های

زیر دیده می شود،در مثلث قائم ازاویه oPQداریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$





پس

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta$$

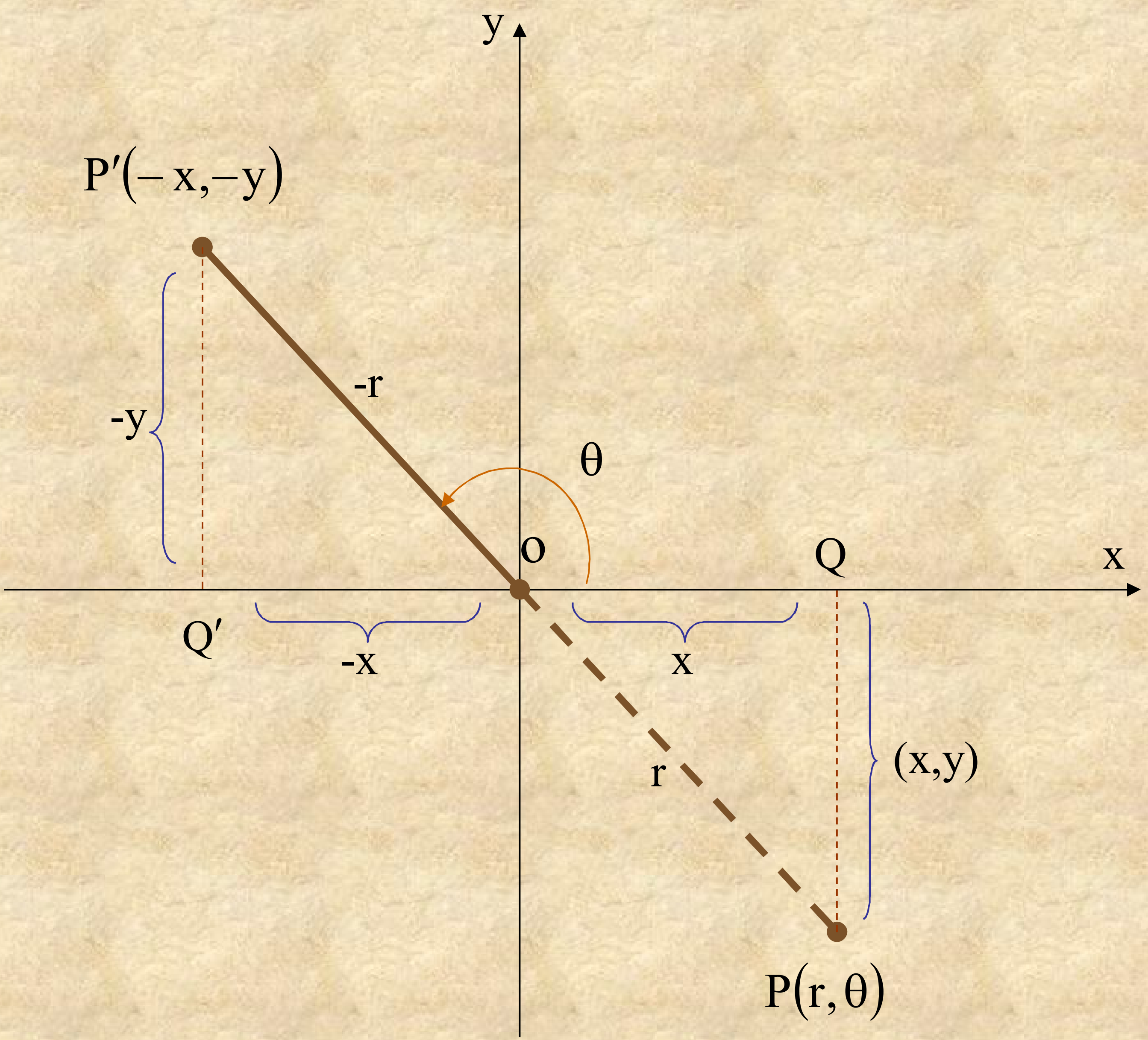
$$= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

بنابراین

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲) اگر $r<0$، نقطه P روی ادامه شعاع نهایی زاویه θ واقع است.

شکل اسلاید بعدی را ببینید.


y
$P'(-x,-y)$
-r
-y
θ
o
Q
x
Q′
-x
x
r
(x,y)
$P(r,\theta)$

در مثلث قائم الزاویه $oP'Q'$ داریم:

$$\cos\theta = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

با توجه به حالت هاي (۱)و(۲) داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

که از آن نتیجه می شود.

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

۲-۳-۱۲مثال:

فرض کنید مختصات قطبی نقطه P،زوج مرتب $(-3,\frac{\pi}{6})$باشد،مختصات دکارتی P راتعیین کنید.

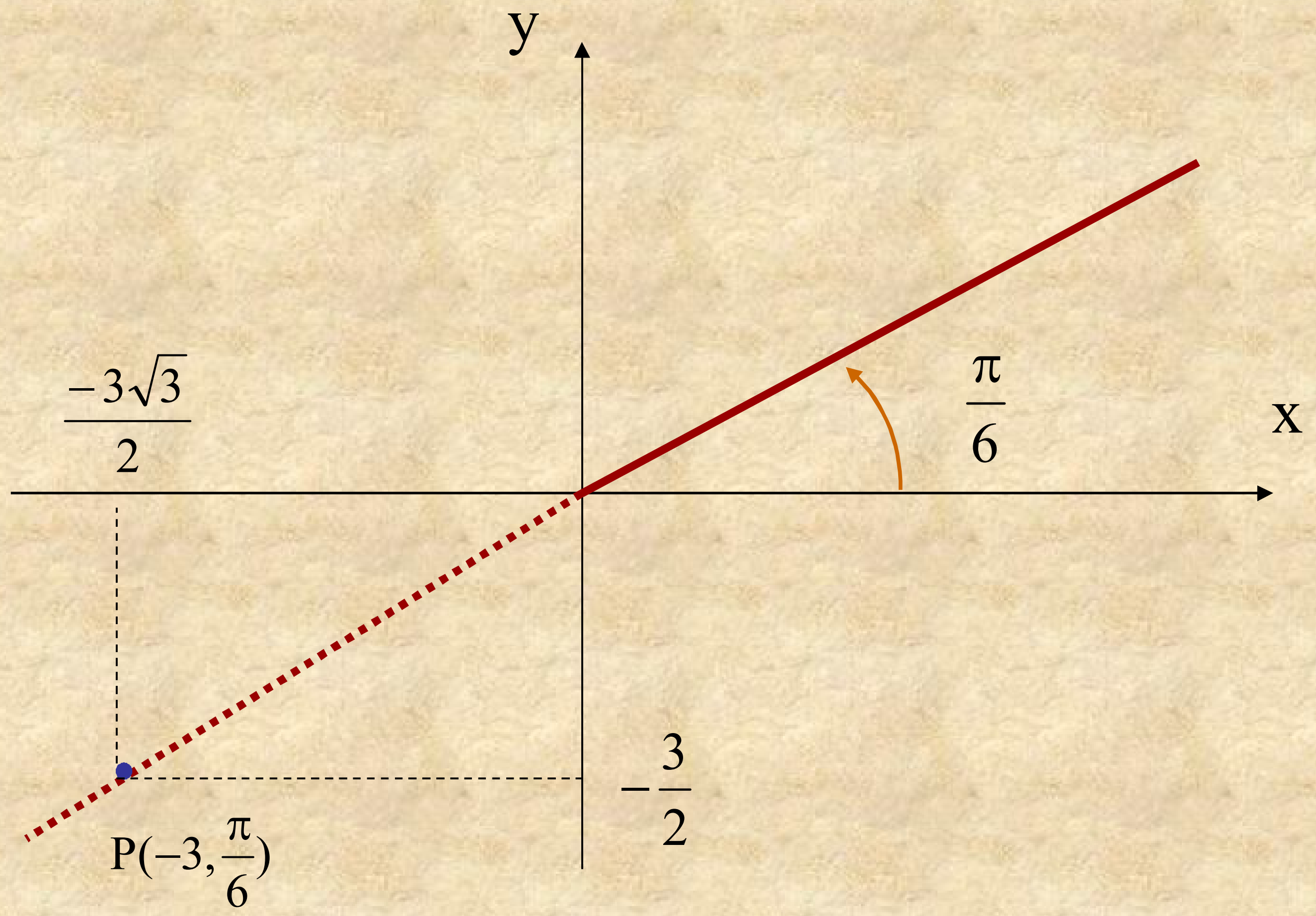
حل:

بنابر۲-۳-۱۱ مختصات دکارتی Pعبارت است از

$$x = r\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = -3\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2}$$

بنابراين مختصات دكارتي P،زوج مرتب $(\frac{-3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$ است.


y
x
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{3}{2}$
$P(-3, \frac{\pi}{6})$

۲-۳-۱۳ مثال:

فرض کنید مختصات دکارتی نقطه P، زوج مرتب $(1,\sqrt{3})$ باشد. بافرض $r>0$ و

$0\le\theta\le2\pi$ مختصات قطبی نقطه P را تعیین کنید.

حل:

بنابر روابط بین دستگاه های مختصات دکارتی و قطبی در ۲-۳-۱۱ داریم

$$\begin{cases}1=r\cos\theta\\ \sqrt{3}=r\sin\theta\end{cases} \quad , \quad r=\pm\sqrt{1+3}=\pm2$$

از $r>0$ نتیجه باشدکه $r=2$. برای تعیین θ ازمعادله های

$$\begin{cases}1=2\cos\theta\\ \sqrt{3}=2\sin\theta\end{cases}$$

به دست می آوریم

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مختصات قطبی نقطه P،زوج مرتب $(2, \frac{\pi}{3})$ است.

۲-۳-۱۶ تعریف:

فرض کنیم (r, θ) مختصات قطبی یک نقطه در صفحه باشد.معادله ای به صورت $r = f(\theta)$ را ***معادله قطبی*** می نامیم.

۲-۳-۱۸ مثال:

معادله قطبی $r^2 = \cos^2\theta + \sin 2\theta$ را در نظر می گیریم. می خواهیم معادله دکارتی آن را تعیین کنید.

حل:

باشرط $r \neq 0$ قرارمی دهیم $r^2 = x^2 + y^2$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta$$

پس

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$= \frac{2xy + x^2}{x^2 + y^2}$$

در نتیجه بدست می آوریم.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy + x^2$$

فصل سوم

رابطه وتابع

هدف کلی

هدف کلی فصل این است که با مفاهیم رابطه و تابع، انواع توابع ، توابع خاص ، اعمال جبری روی توابع، و وارون تابع آشنا شوید.

هدفهای رفتاری

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱) مفهوم رابطه را توضیح دهید.

۲) تابع را تعریف کنید وتفاوت آن را با رابطه توضیح دهید.

۳) دامنه تابعی را که ضابطه تعریف آن داده شده است ، تعیین کنید.

۴)نمودار توابع را با روش نقطه یابی رسم کنید.

۵) اعمال جبری روی توابع را تعریف کنید و در حل مسائل بکار ببرید.

۶) انواع توابع جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ، ویژگیهای

هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

۷) انواع توابع غیر جبری معرفی شده در کتاب را بشناسید ،

ویژگیهای هر یک را بشناسید و این ویژگیها را در حل مسائل به کار ببرید.

۸) تعیین کنید که هر تابع معلوم زوج است یا فرد، یا هیچکدام.

۹) تعیین کنید که تابع معلوم کراندار است یا بیکران.

۱۰) تعیین کنید تابع پوشاست یا نه.

۱۱) تعیین کنید تابع یک به یک است یا نه.

۱۲) شرایط وارون پذیری تابع را توضیح دهید و وارون آن هر تابع معلوم را ، در صورت وجود ، تعیین کنید.

۱۳) نشان بدهید که توابع نمایی و لگاریتمی وارون همدیگرند.

۱۴)وارون توابع مثلثاتی را توضیح بدهید.

مقدمه:

در علوم گوناگون ، مجموعه هایی که عضوهای آنها زوج مرتب اند اهمیت خاصی دارند. در این فصل به معرفی و مطالعه این گونه مجموعه ها می پردازیم.

۳ـ ۱ رابطه

۳-۱-۱ مقدمه:

در بسیاری از توابع با مجموعه هایی از زوجهای مرتب سروکار داریم .

برای مثال ، هنگامی که متحرکی روی خط مستقیم حرکت می کند، فاصله

آن از مبدا را در هر لحظه می توان بوسیله زوج مرتب (s , t) نشان داد

که در آن $t \geq 0$، و s فاصله متحرک از مبدا است .

۳-۱-۲ تعریف :

هر مجموعه ای از زوج مرتب را یک رابطه دوتایی یا بطور خلاصه یک

رابطه می نامیم.

۳-۱-۴ تعریف :

فرض می کنیم R یک رابطه باشد و $(x,y)\in R$ در این صورت می نویسیم

xRy و می خوانیم « x رابطه R دارد با y »یا «بین x و y رابطه R

برقرار است » یا « رابطه R ، x را به y نسبت می دهد(نظیر می کند»

۳-۱-۵ مثال :

رابطه های مثال ۳-۱-۳ را در نظر می گیریم .بنابر ۳-۱-۴ داریم :

$(1,2)\in S_1$ یا $1S_12$

$(2,4)\in S_2$ یا $2S_24$

$(2,5)\in S_3$ یا $2S_35$

(ایران،تهران) $\in S_4$ یا ایران S_4 تهران

۳-۱-۶ تعریف :

مجموعه تمام مختص های اول زوج مرتب یک رابطه **دامنه** یا **قلمرو** یک رابطه و مجموعه تمام مختصهای دوم عضوهای رابطه را **هم دامنه**رابطه می نامیم

۳-۱-۷ مثال :

رابطه های مثال ۳-۱-۳ را در نظر می گیریم.

دامنهS_1 مجموعه {۲و۱} وهم دامنه آن مجموعه {۸و۳و۲} است .

دامنه وهم دامنه S_2، مجموعه تمام اعداد حقیقی است .

دامنهS_3مجموعه تمام اعدد حقیقی وهم دامنه آن مجموعه $\{y \mid y \geq 1\}$ است.

دامنه S_4 مجموعه {تهران،کابل،اسلام آباد} و هم دامنه آن {ایران، پاکستان، افغانستان} است .

۲ – ۳ تابع

۳-۲-۱ مقدمه:

در این بخش دسته خاصی از رابطه ها را ، که تابع نامیده می شوند

و اهمیت ویژه ای دارند، معرفی می کنیم.

۳-۲-۲ تعریف :

فرض می کنیم دامنه رابطه f مجموعه A وهم دامنه آن مجموعه C باشد که

زیر مجموعه ای از B است $(C \subseteq B)$ رابطه f را یک تابع از A به B

می نامیم اگر دو شرط زیر برقرار باشد :

الف) برای هر عضو $x \in A$، عضوی مانند $y \in B$ وجود داشته باشد به گونه ای که $(x,y)\in f$. به بیان دیگر f باید هر عضو A را به عضوی از B نسبت دهد.

ب) اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$ آنگاه $y=z$. یعنی f هر عضو A را تنها به یک عضو از B نسبت بدهد.

به طور خلاصه رابطه f را یک تابع می گوییم در صورتی که f هر عضو A را فقط و فقط به یک عضو از B نسبت بدهد.

۳-۲-۳ تعریف :

اگر f تابعی از A به B باشد، می نویسیم:

$$f : A \to B$$

مجموعه A را دامنه تابع f می نامیم وبا نماد D_f نشان می دهیم، و مجموعه B را برد تابع f و با نماد R_f نشان می دهیم. بنابراین :

$$D_f = A \quad , \quad R_f = B$$

۳-۲-۴ تعریف :

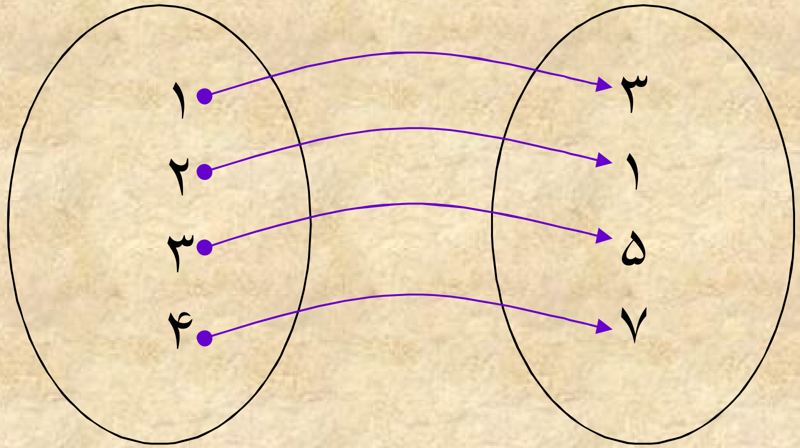
چون بنابر تعریف تابع ، به ازای هر x از دامنه f تنها یک عضو از برد مانند y وجود دارد به گونه ای که $(x, y) \in f$ معمولا y را مقدار f در x می نامیم وبجای $(x, y) \in f$ می نویسیم: y=f(x)

x را متغیر و f(x) را **تصویر x توسط f** می نامیم. معادله y=f(x) را **ضابطه تعریف تابع** می نامیم.

۳-۲-۶ مثال :

نشان بدهید که رابطه $g=\{(2,1),(1,3),(3,5),(4,7)\}$ یک تابع است .

حل:دامنه رابطه g ، مجموعه $\{2,1,3,4\}$ و هم دامنه آن $\{1,3,5,7\}$ است .



مشاهده می کنیم که هر عضو از دامنه g فقط و فقط به یک عضو از هم دامنه g توسط رابطه g نسبت داده شده است . بنابراین g یک تابع است .

۳-۲-۷ نکته:

در مثال ۳-۲-۶ ، تابع بودن رابطه g را با بررسی تمام زوج هایمرتب

آن انجام دادیم، در حالی در مثال ۳-۲-۵ که رابطه f با ضابطه ای تعریف

شده است ، برای تشخیص تابع بودن f از تعریف تابع استفاده کردیم.

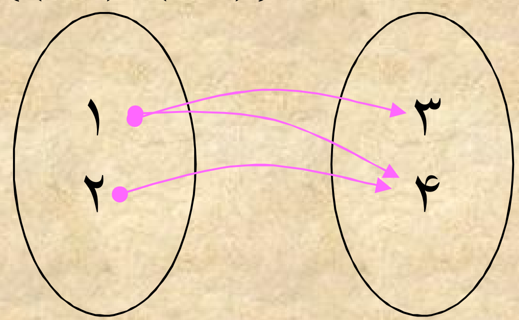
۳-۲-۸ مثال :

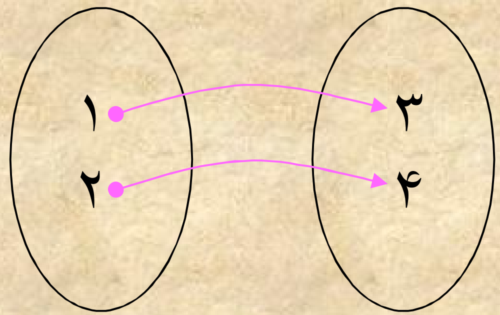
تحقیق کنید کدام یک از رابطه های زیر تابع است .

$$R_1 = \{(1,3),(1,4),(2,4)\}$$

حل:

$$R_2 = \{(1,3),(2,4)\}$$





۳-۲-۱۰ تعیین دامنه تابع:

هر تابع با ضابطه تعریف و مجموعه های دامنه وبرد مشخص می شود.

معمولا روش کلی برای مشخص کردن یک تابع این است که نخست دامنه تابع را تعریف کنند ، به این ترتیب با ضابطه تعریف تابع ، مقدار تابع به ازای هر عضو دامنه مشخص می شود.

اگر دامنه تابعی مشخص نشده باشد ، آن را مجموعه تمام اعدادی در نظر می گیریم که به ازای آنها ضابطه تعریف تابع با معنی باشد.

مثلا برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

چون تقسیم بر صفر مجاز نیست، دامنه تابع مجموعه تمام اعداد حقیقی ناصفر است، یعنی

$$D_f = R - \{0\}$$

به همین ترتیب، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x}$ مجموعه تمام عدد حقیقی نامنفی است ، یعنی

$$D_g = R^+ \cup \{0\}$$

زیرا ریشه دوم عدد حقیقی x فقط وقتی تعریف می شود که داشته باشیم:

$$x \geq 0$$

۳-۲-۱۴ مثال :

فرض کنید $f(x) = \frac{2x}{x+1}, \ x \in R - \{-1\}$ مقادیر $f(1), f(-x), f(x-1)$

را تعیین کنید.

حل:

داریم :

$$f(1) = \frac{2(1)}{1+1} = 1$$

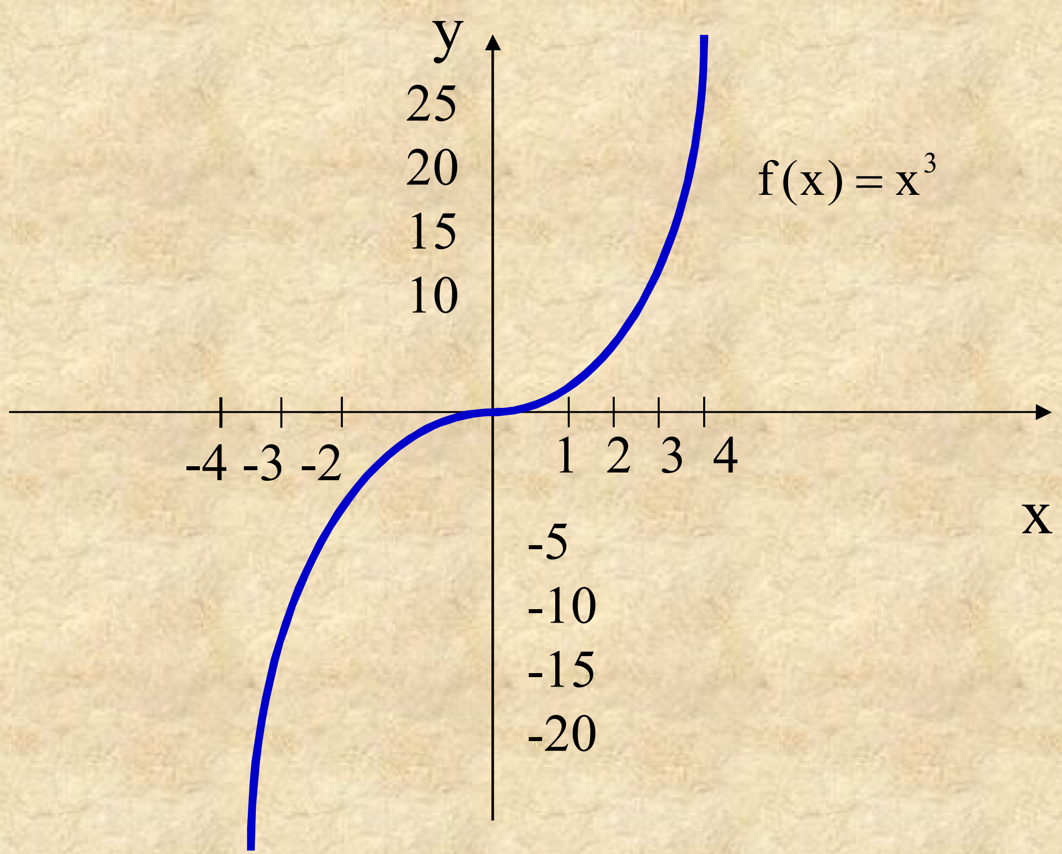
$$f(-x) = \frac{2(-x)}{-x+1} = \frac{-2x}{-x+1} = \frac{2x}{x-1}$$

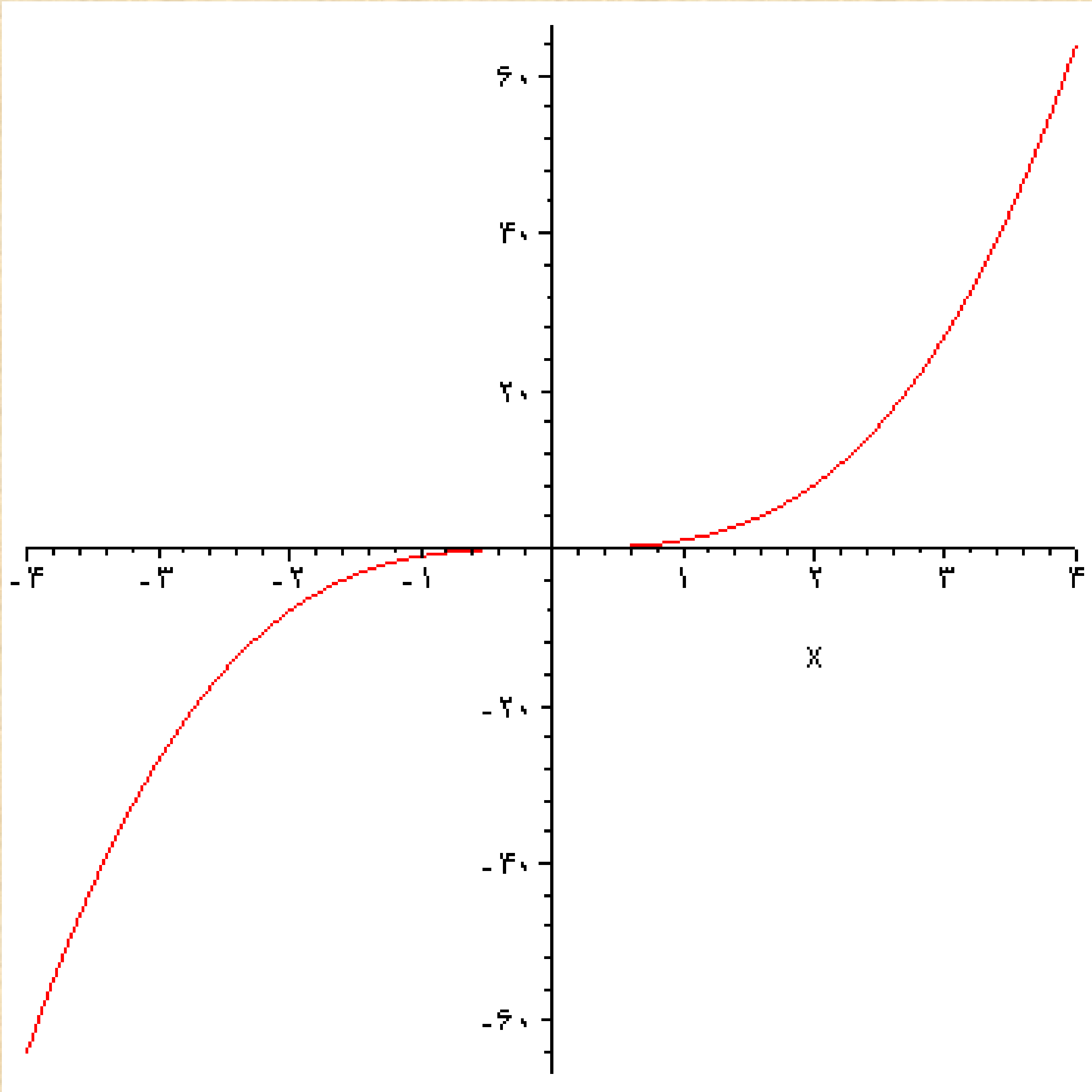
$$f(x-1) = \frac{2(x-1)}{(x-1)+1} = \frac{2(x-1)}{x}$$

۳-۲-۱۷ مثال :

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ را رسم کنید.

x	f(x)
0	0
1	1
2	8
3	27
-1	-1
-2	-8
-3	-27



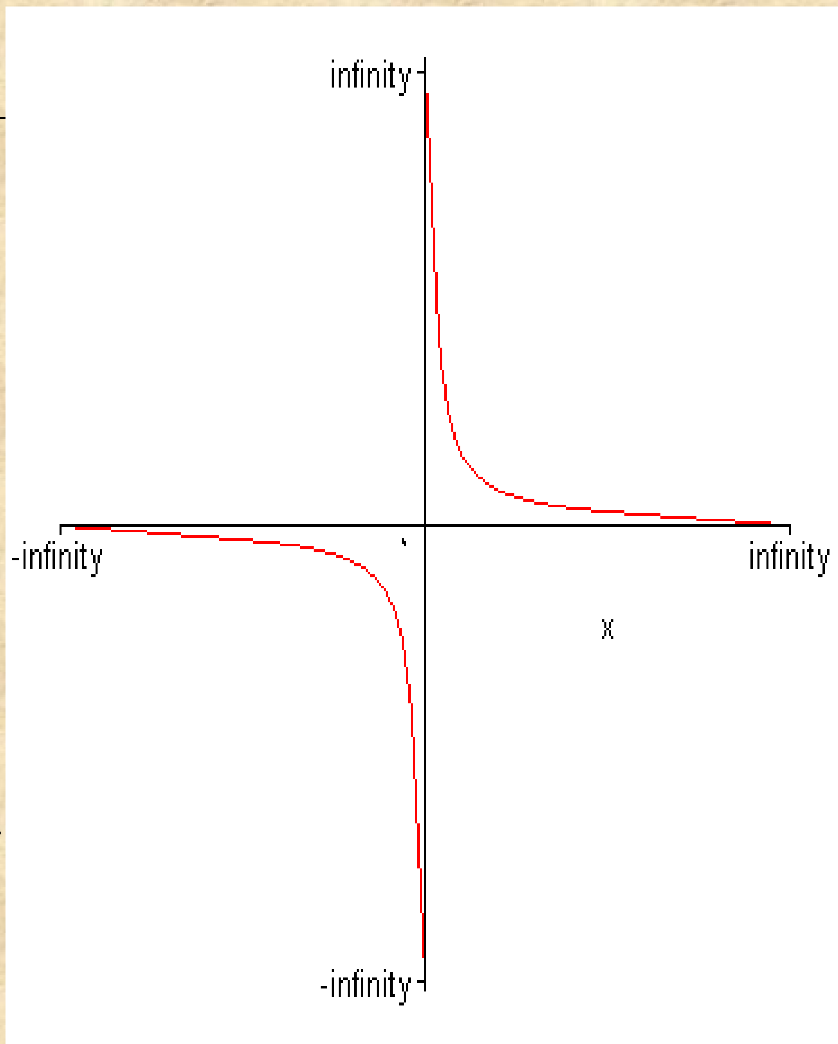

۶۰
۴۰
۲۰
-۲۰
-۴۰
-۶۰
-۴
-۳
-۲
-۱
۱
۲
۳
۴
X

۳-۲-۱۸ مثال :

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را رسم کنید.

x	f(x)
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

x	f(x)
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{3}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-4	$-\frac{1}{4}$



۳-۳جبر توابع

۳-۳-۱ مقدمه:

بسیاری از توابعی که در مسائل مطرح می شوند ممکن است ترکیبی از توابع دیگر باشند. برای مثال ، فرض کنید $P(x)$ مقدار سودی باشد که یک شرکت از فروش x عدد از کالا یی بدست می آورد. اگر $R(x)$از فروش x واحد و$C(x)$ هزینه تولید x واحد کالا باشد، داریم :

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

(هزینه)-(درآمد)=(سود)

به این ترتیب می توان رفتار تابع $P(x)$ را با استفاده از ویژگیهای توابع $P(x)$و $C(x)$ پیش بینی کرد. در این بخش به بررسی اعمال جبری روی توابع می پردازیم.

۳-۳-۲ تعریف :

دو تابع f و g را برابر یا مساوی می نامیم ، در صورتی که

(الف) دامنه های f و g مساوی باشند، یعنی $D_f = D_g$

(ب) به ازای هر x از دامنه مشترک fو g ، تساوی f(x)=g(x) برقرار باشد.

۳-۳-۳ مثال :

(الف) دو تابع با ضابطه های تعریف $g(x) = 2x + 5$ ، $f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x}$

برابر نیستند ، زیرا مجموعه های $D_f = R - \{0\}$ ، $D_g = R$ مساوی نیستند.

ب) دو تابع با ضابطه های تعریف $g(x) = 2x + 5 \quad , \quad f(x) = \frac{(2x+5)(x^2+1)}{x^2+1}$

برابرند، زیرا همواره $x^2 + 1 \neq 0 \quad , \quad D_f = D_g = R$، به علاوه، به

ازای هر عدد حقیقی داریم :

$$f(x) = g(x) = 2x + 5$$

۳-۳-۵ تعریف :

فرض می کنیم f و g توابعی با دامنه های D_g , D_f باشند. توابع جدید $\frac{f}{g}$, f+g , f-g , fg را به صورت زیر تعریف می کنیم:

الف)تابع حاصل جمع f+g روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

ب) تابع تفاضل f-g روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(f+g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

پ) تابع حاصل ضرب fg روی $D_f \cap D_g$ با ضابطه

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad ; x \in D_f \cap D_g$$

ت) تابع خارج قسمت $\frac{f}{g}$ روی نقاطی از $D_f \cap D_g$ که در آن $g(x) \neq 0$

با ضابطه

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; x \in D_f \cap D_g \quad ; g(x) \neq 0$$

۳-۳-۶ مثال :

فرض می کنیم $g(x)=\sqrt{4-x}$, $f(x)=\sqrt{x-2}$ دامنه های f و g

عبارتند از

$$D_f=\{x\in R \mid x-2\geq 0\}=[2,+\infty)$$

$$D_g=\{x\in R \mid 4-x\geq 0\}=(-\infty,4]$$

بنابراین دامنه توابع f-g , f+g , fg عبارتند از

$$D_f\cap D_g=[2,+\infty)\cap(-\infty,4]=[2,4]$$

چون x=4 ریشه معادله g(x)=0 است .دامنه تابع $\frac{f}{g}$ برابر با بازه

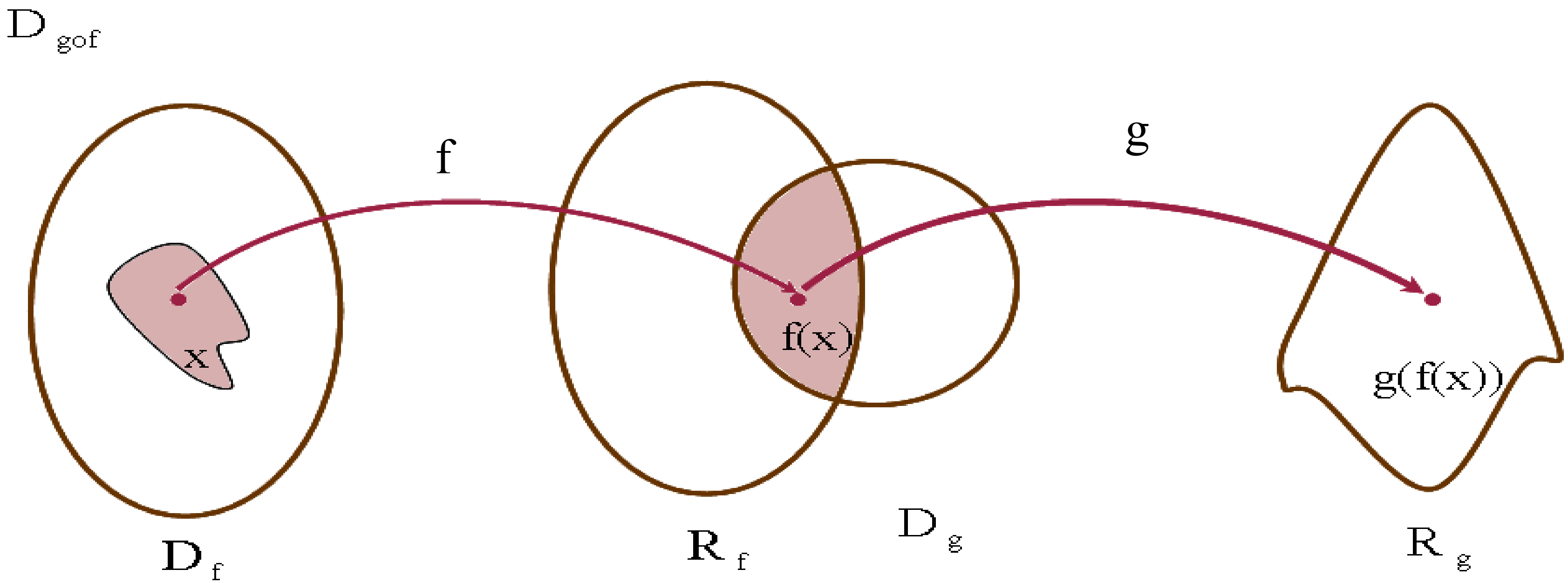
[2 , 4) است وداریم:

$$(f+g)(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \qquad , \qquad x\in[2,4]$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x} \qquad , \qquad x\in[2,4]$$

$$(fg)(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{4-x} \qquad , \qquad x\in[2,4]$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\frac{x-2}{4-x}} \qquad , \qquad x\in[2,4)$$


D_{gof}
f
g
x
f(x)
g(f(x))
D_f
R_f
D_g
R_g

۴-۳توابع جبری

۳-۴-۱ مقدمه:

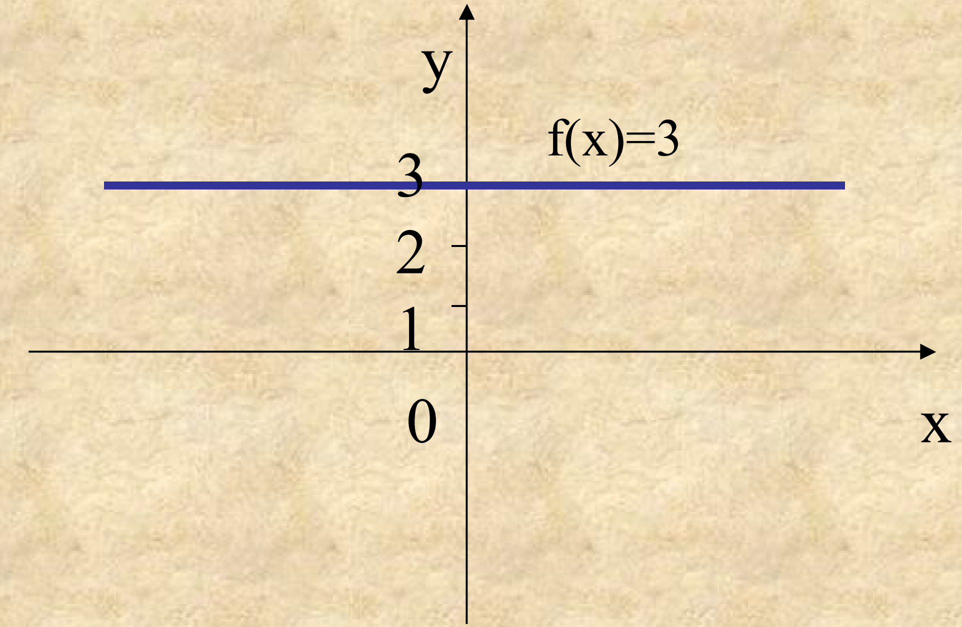
در این بخش به معرفی توابعی می پردازیم که در مباحث مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال نقش مهمی دارند.

۳-۴-۲ تعریف :

اگر دامنه و برد تابع f زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی باشند ، f را یک تابع حقیقی می نامیم.برای مثال $f: R^+ \to R$ با ضابطه تعریف $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ **یک تابع حقیِقی** است .

۳-۴-۳ تعریف :

اگر برد تابع حقیقی f ، مجموعه ای یکانی باشد آنگاه f را یک **تابع ثابت** می نامیم. برای مثال تابع $f : R \to \{3\}$ با ضابطه تعریف $f(x)=3$ یک تابع ثابت است و داریم $f(0)=3$, $f(1)==3$, $f(-5)=$. نمودار $f(x)=3$ در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۴ تعریف :

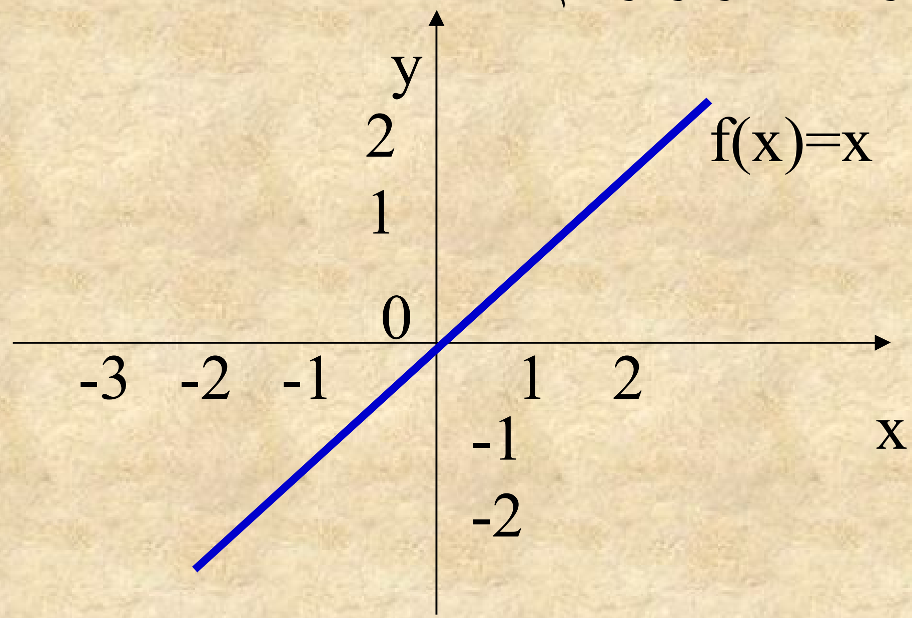
اگر دامنه وبرد تابع f مجموعه عدد حقیقی و برای هر عدد حــقیقی x

داشته باشیم $f(x)=x$ ، آنگاه f را **تابع همانی** می نامیم. بعضی مقادیر این

تابع عبارت اند از:

$$f(0)=0\ ,\ f(-3)=-3\ ,\ f(2)=2$$

نمودار تابع همانی در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۵ تعریف :

تابع فاکتوریل تابعی مانند $f: N\cup\{0\} \to N$ با ضابطه تعریف $f(n)=n!$ است.

چند تایی از مقادیر تابع فاکتوریل عبارت اند از:

$$f(0)=1$$

$$f(1)=1$$

$$f(2)=2!=1\times 2=2$$

$$f(3)=3!=1\times 2\times 3=6$$

$$f(4)=4!=1\times 2\times 3\times 4=24$$

$$f(5)=5!=1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$$

۳-۴-۶ تعریف :

تابع $f : R \to R^+ \cup \{0\}$ با ضابطه تعریف $f(x) = |x|$ **تابع قدر مطلق**

می نامیم.یادآوری می کنیم که قدر مطلق عدد حقیقی x را با نماد $|x|$ نشان

می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

✵ از تعریف بالا نتیجه می شود که قدر مطلق هر عدد حقیقی x عددی

نامنفی است . یعنی $|x| \geq 0$

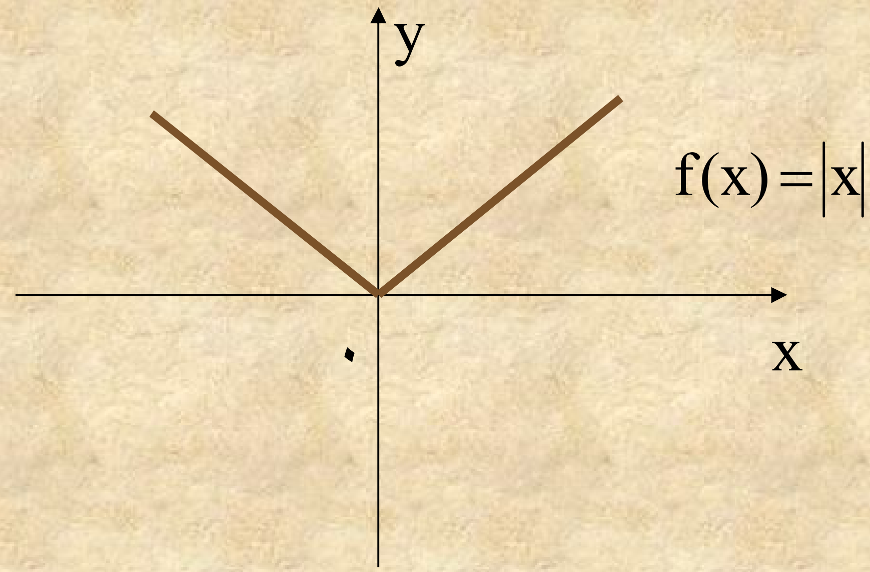
بعضی مقادیراین تابع عبارت اند از:

$$f(0)=|0|=0$$

$$f(-2)=|-2|=-(-2)=2$$

$$f(\sqrt{2})=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

نمودار تابع قدر مطلق در شکل زیر رسم شده است :



۳-۴-۸ تعریف :

تابع حقیقی $f : R \to Z$ با ضابطه تعریف $f(x)=[x]$ را **تابع جزء صحیح** می نامیم.

توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح x را با نماد $[x]$

نشان می دهیم وبرابر است با بزرگترین عدد حقیقی صحیح نابیشتر از

(کوچکتر یا مساوی) x تعریف می کنیم. بنابراین $[x] \le x \le [x]+1$

چند تا از مقادیر این تابع عبارت اند از:

$$f(0) = [0] = 0$$

$$f(\frac{3}{2}) = [\frac{3}{2}] = 1$$

$$f(-\frac{3}{2}) = [-\frac{3}{2}] = -2$$

$$f(-5) = [-5] = -5$$

دقت کنید که جزء صحیح هر عدد حقیقی ، عددی صحیح است وجزء صحیح هر عدد صحیح با خود آن برابر است .برای رسم نمودارتابع $f(x)=[x]$ ، از مقادیر زیر استفاده می کنیم:

اگر $-4 \le x \le -3$ آنگاه $f(x)=[x]=-4$

اگر $-3 \le x < -2$ آنگاه $f(x)=[x]=-3$

اگر $-2 \le x < -1$ آنگاه $f(x)=[x]=-2$

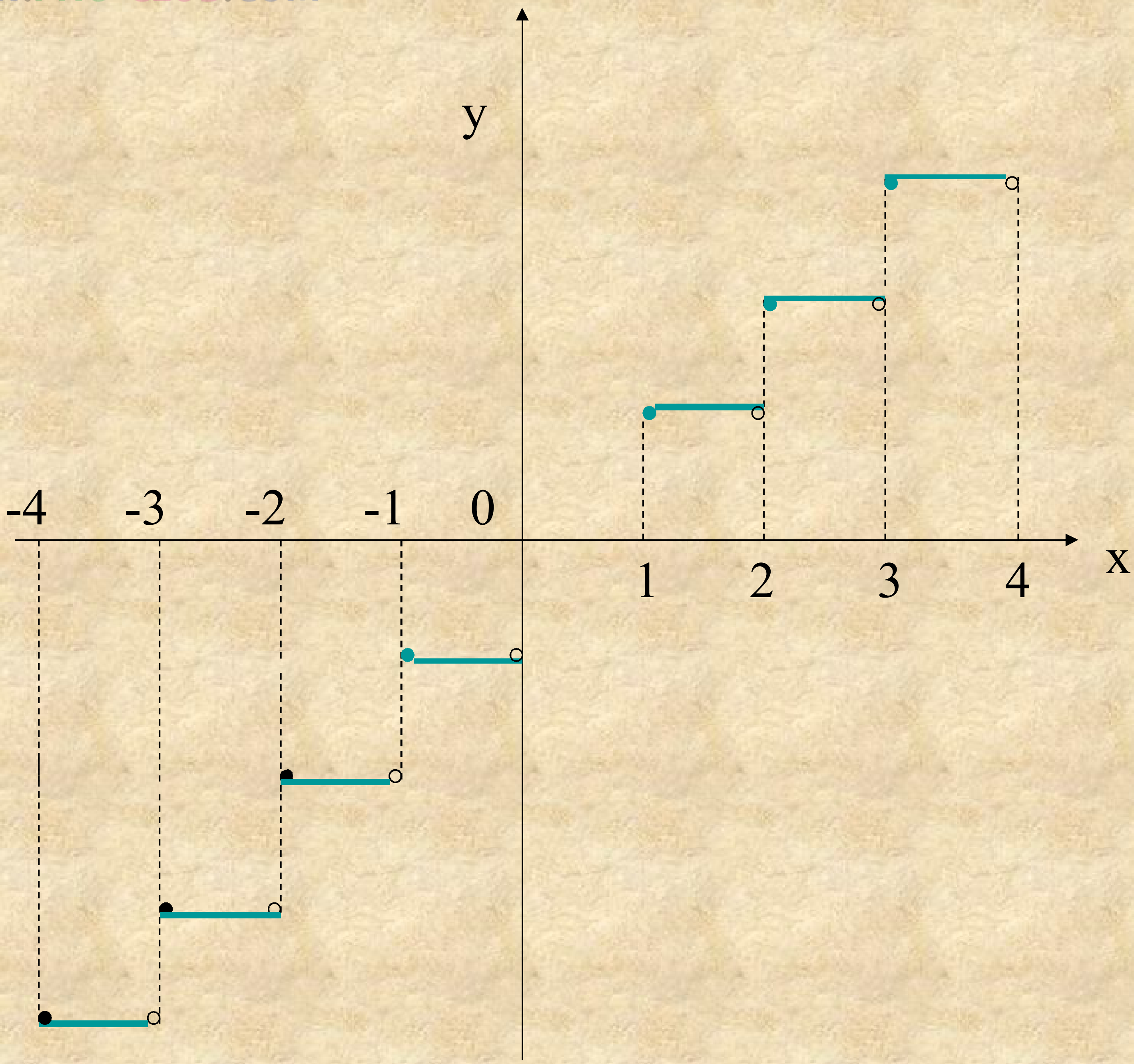
اگر $-1 \le x < 0$ آنگاه $f(x)=[x]=-1$

اگر $0 \le x < 1$ آنگاه $f(x)=[x]=0$

اگر $1 \le x < 2$ آنگاه $f(x)=[x]=1$

اگر $2 \le x < 3$ آنگاه $f(x)=[x]=2$

اگر $3 \le x < 4$ آنگاه $f(x)=[x]=3$


y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

۳-۴-۹ تعریف :

تابع خطی f تابعی است که دامنه و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است ، و

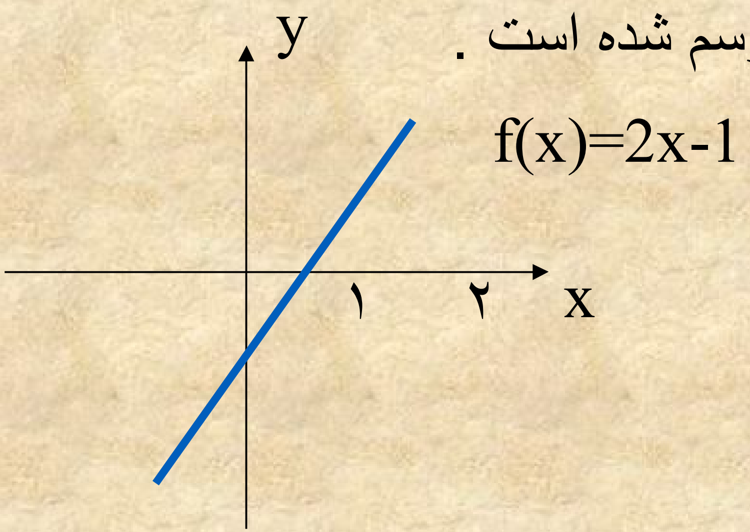
برای هر عدد حقیقی x با ضابطه :

$$f(x) = ax + b$$

تعریف می شود ، که در آن a و b عدد حقیقی ثابتی هستند .

نمودار هر تابع خطی ، یک خط راست است .

نمودار تابع خطی $f(x)=2x-1$ در شکل زیر رسم شده است .



۳-۴-۱۰ تعریف :

تابع چند جمله ای p تابعی است که دامنه و برد آن مجموعه اعدد حقیقی است و برای عدد حقیقی x با ضابطه

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

تعریف می شود .در اینجا n یک عدد صحیح نا منفی است و $a_n,\ldots,a_1,a_0$

عدد حقیقی اند و $a_0 \neq 0$. n را درجه چند جمله ای $P(x)$ و $P(x)$ را یک

چند جمله ای از n می نامیم.

تابع $P(x) = -3x^2 + 2x + 7$ یک تابع چند جمله ای درجـــه دوم و تابع

$q(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ یک تابع چند جمله ای از درجه چهار است .

۵-۳توابع غیر جبری

۳-۵-۱ مقدمه :

در بخش ۳-۴ با توابع جبری آشنا شدیم . اما توابع دیگری نیز در ریاضیات مطرح می شودکه جبری نیستند . این دسته توابع را توابع غیر جبری یا متعالی مي ناميم . از جمله توابع غیر جبری می توان از توابع نمایی ، توابع لگاریتمی ، و توابع مثلثاتی نام برد که در این بخش به معرفی آنها می پردازیم .

3-5-2 تعریف :

برای هر عدد حقیقی ثابت $a \neq 1, a > 0$ تابع $f : R \to R^{+}$ با ضابطه تعریف

$$f(x) = a^{x}$$

را یک **تابع نمایی** می نامیم.

بنا بر تعریف بالا روشن است که برای هر عدد حقیقی x داریم $a^{x} > 0$

یادآوری می کنیم که بنا بر خواص توان اعداد ، برای هر دو عدد حقیقی x و y روابط زیر برقرارند :

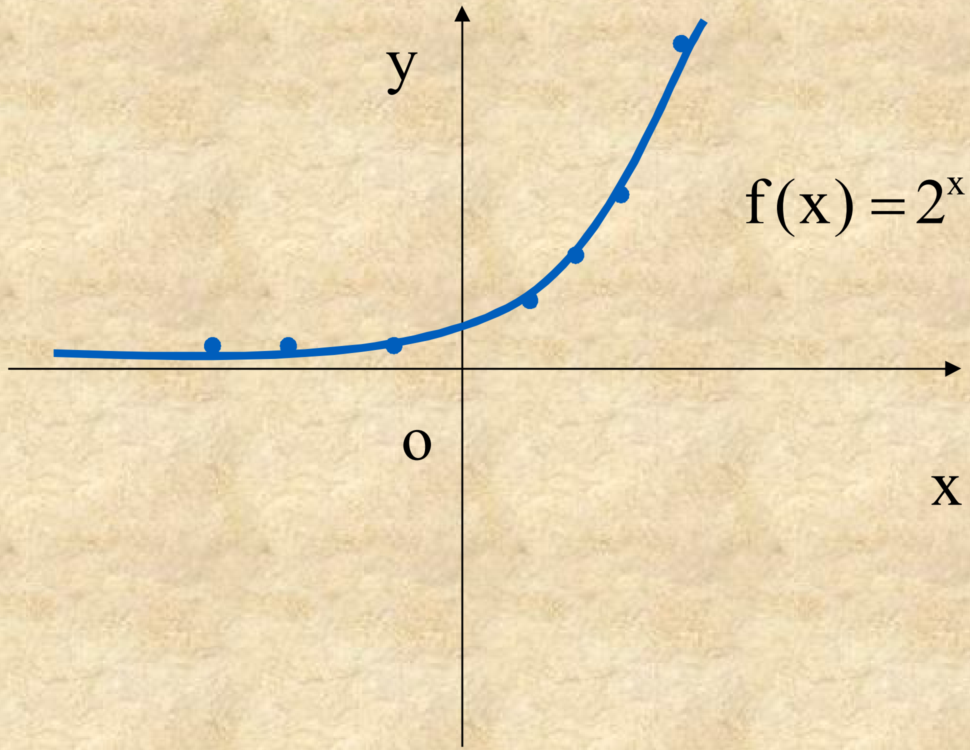
الف) $a^{x}a^{y} = a^{x+y}$ ب) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^{x}}$

پ) $a^{x-y} = \dfrac{a^{x}}{a^{y}}$ ت) $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

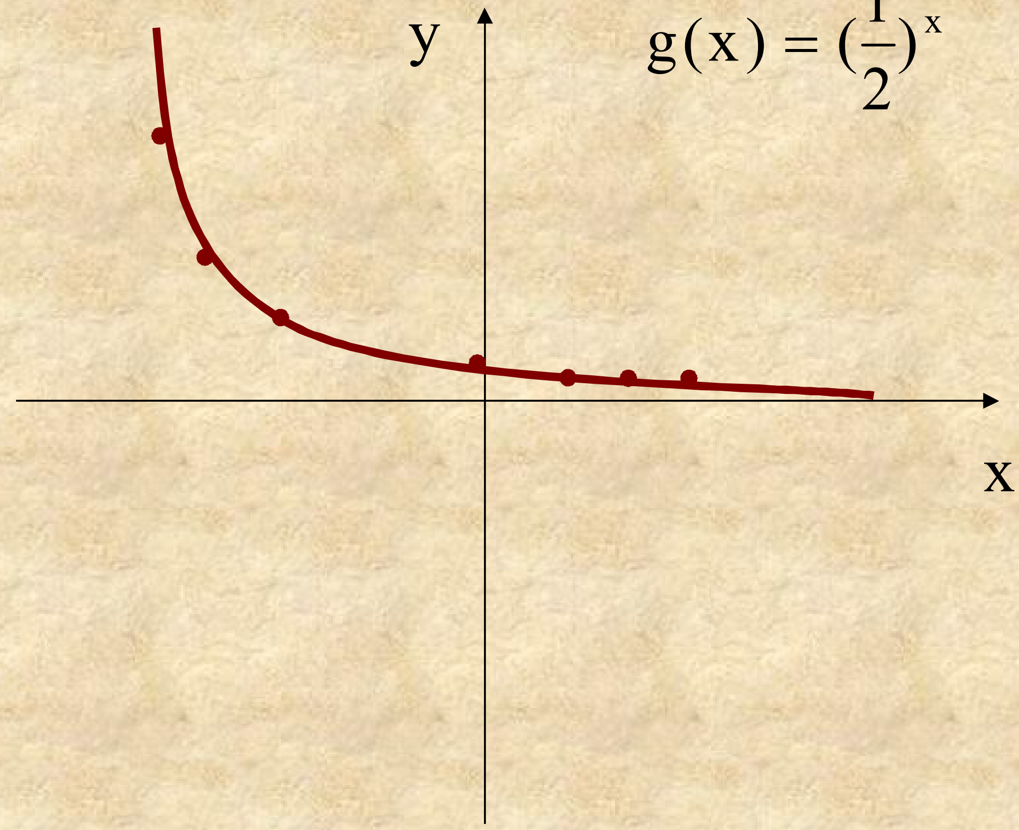
هر یک از توابع $g(x)=(\frac{1}{2})^x$ و $f(x)=2^x$ توابعی نمایی اند ، که

نمودارهای آنها درشکلهای زیر رسم شده است:

x	$f(x)=2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$



x	$g(x)=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
-1	2
-2	4
-3	8



$$g(x) = (\frac{1}{2})^x$$

۳-۵-۳ تابع نمایی e^x

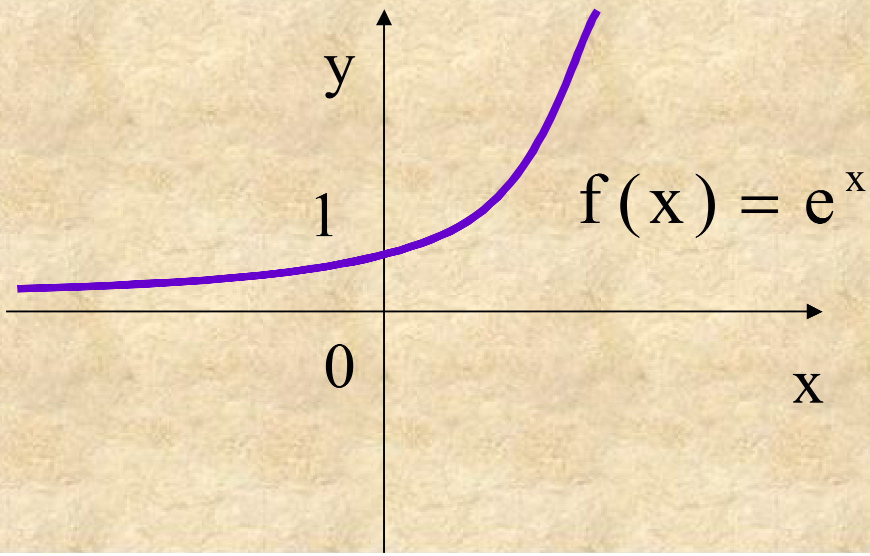
در تعریف تابع $f(x)=a^x$ اگر a را برابر عدد گنگ e انتخاب کنیم که

مقدار تقریبی آن تا نه رقم برابر ۲/ ۷۱۸۲۸۱۸۲۸ است ،تابع نمایی $f(x)=e^x$

بدست می آید ، این تابع را با نماد

$$e^x=\exp(x)$$

نیز نشان می دهند . نمودار تابع $f(x)=e^x$ در شکل زیر رسم شده است.



۳-۵-۴ تعریف:

فرض می کنیم a عددی مثبت باشد و $a \neq 1$ تابع حقیقی $f: R^{+} \to R$

ضابطه تعریف $f(x) = \log_a^x$ را **تابع لگاریتم در مبنای a** می نا میم .

یادآوری می کنیم که منظور از لگاریتم عدد مثبت x در مبنای a ، عدد ی

است مانند y به طوری که $a^y = x$. لگاریتم x در مبنای a را با نماد

$\log_a^x$ نشان می دهیم . بنابر این همواره داریم

$$\log_a^x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

✵توجه کنید که لگاریتم اعداد منفی و صفر تعریف نشده است .

۳-۵-۵ مثال : داریم

$$5^{2} = 25 \Leftrightarrow \log_{5}^{25} = 2$$

$$2^{-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_{2}^{\frac{1}{16}} = -4$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \log_{10}^{\frac{1}{100}} = -3$$

$$3^{0} = 1 \Leftrightarrow \log_{3}^{1} = 0$$

$$7^{1} = 7 \Leftrightarrow \log_{7}^{7} = 1$$

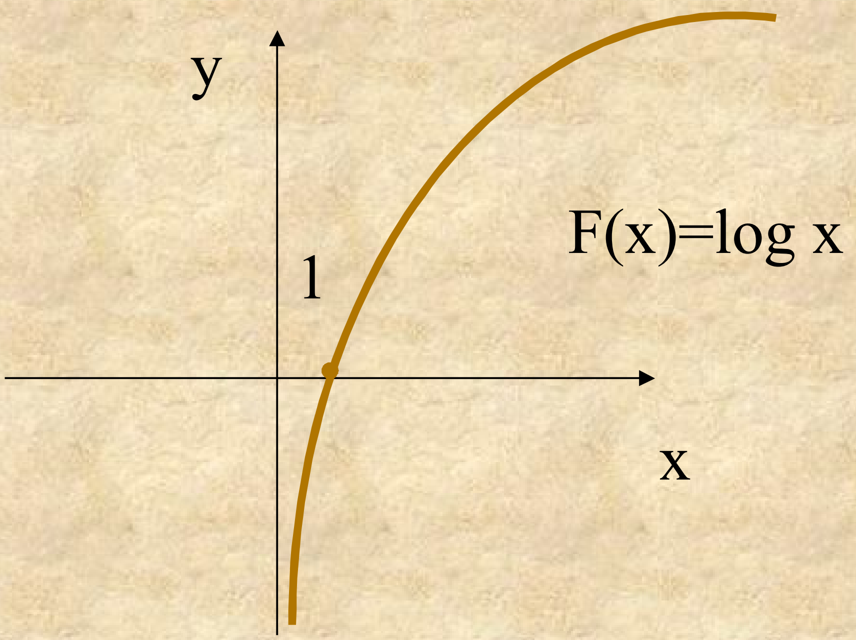
۳-۵-۱۲ نمودار تابع لگاریتمی:

اگر مبنای لگاریتم را عدد ۱۰ اختیار کنیم ، لگاریتم را **لگاریتم معمولی** یا **اعشاری** می نامیم.در لگاریتم معمولی ، عدد مبنا را معمولاً نمی نویسند،

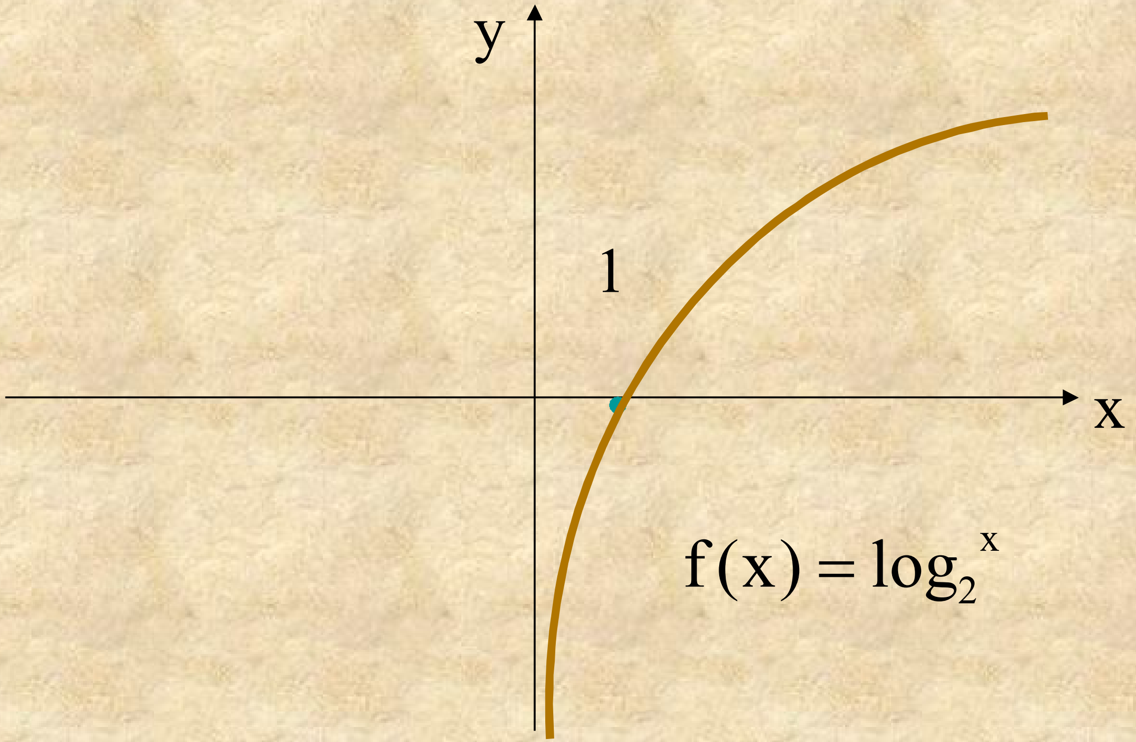
به عبارت دیگر:

$$\log_{10}^{x} = \log x$$

نمودار تابع لگاریتم معمولی در شکل زیر رسم شده است .



نمودار تابع $f(x)=\log_2^x$ در شکل زیر رسم شده است .



۳-۵-۱۳ تابع لگاریتم طبیعی:

در محاسبات لگاریتمی اگر مبنا را عدد گنگ e اختیار کنیم، لگاریتم را **لگاریتم طبیعی یا لگاریتم نپری** می نامیم. معمولا لگاریتم طبیعی را با نماد ln نمایش می دهند. به عبارت دیگر:

$$\log_e^x = \ln x$$

۶-۳توابع خاص

در این بخش برخی از ویژگی های توابع را بررسی می کنیم.

3-6-2مثال :

الف)اگر $f(x)=5x^4-3x^2+1$ چون دامنه f مجموعه تمام اعداد حقیقی است ،داریم

$$f(-x)=5(-x)^4-3(-x)^2+1$$
$$=5x^4-3x^2+1 \quad = f(x)$$

بنابراین f ،یک تابع زوج است

ب)فرض می کنیم $g(x)=-2x^5+3x^3-7x$ چون دامنه تابع g مجموعه تمام اعداد حقیقی است ، داریم

$$g(-x) = -2(-x)^5 + 3(-x)^3 - 7(-x)$$

$$= 2x^5 - 3x^3 + 7x$$

$$= -g(x)$$

بنا براین g یک تابع فرد است.

پ) تابع $h(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ را در نظر می گیریم ، داریم

$$h(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^3 + (-x)^2 - 1$$

$$= 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$$

چون $h(-x) \neq -h(x), h(-x) \neq h(x)$ ، تابع h نه زوج است نه فرد

۳-۶-۵ تعریف :

الف) اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر x

از دامنه f داشته باشیم. $f(x) \leq M$

آنگاه f را از **بالا کراندار** می نامیم .

ب) اگر عددی مانند N وجود داشته باشد به گونه ای که برای هر x از

دامنه f داشته باشیم : $f(x) \geq N$

آنگاه f را از **پایین کراندار** می نامیم.

پ)اگر عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر x دامنه f

داشته باشیم

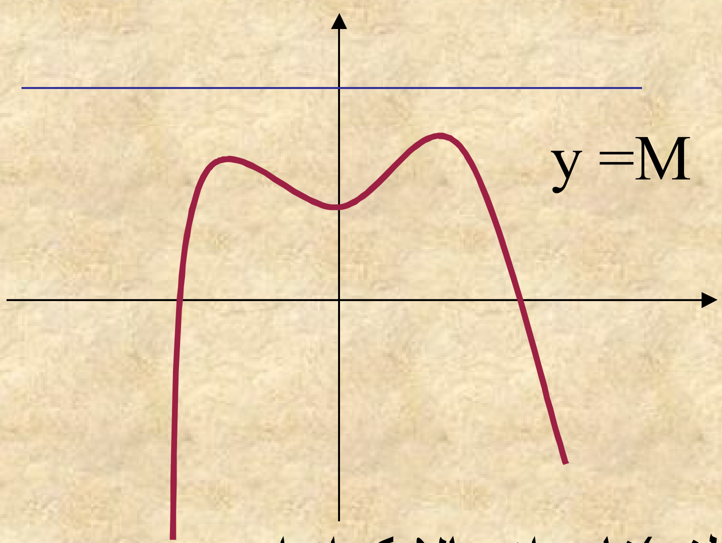
$$-M \le f(x) \le M$$

یا

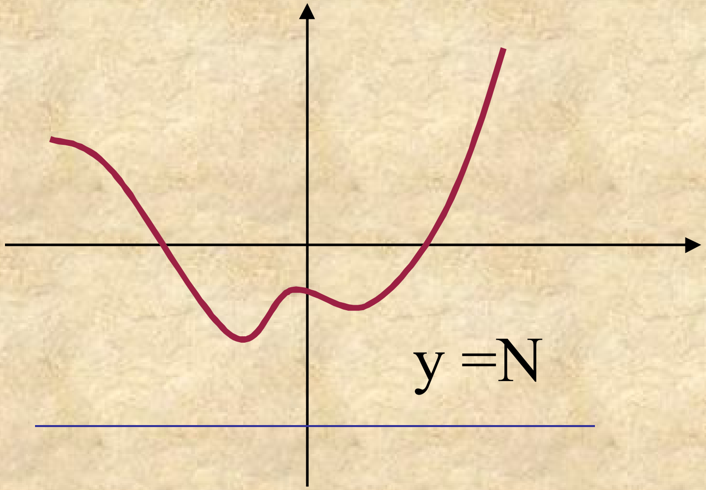
$$|f(x)| \le M$$

آنگاه f را کراندار می نامیم .

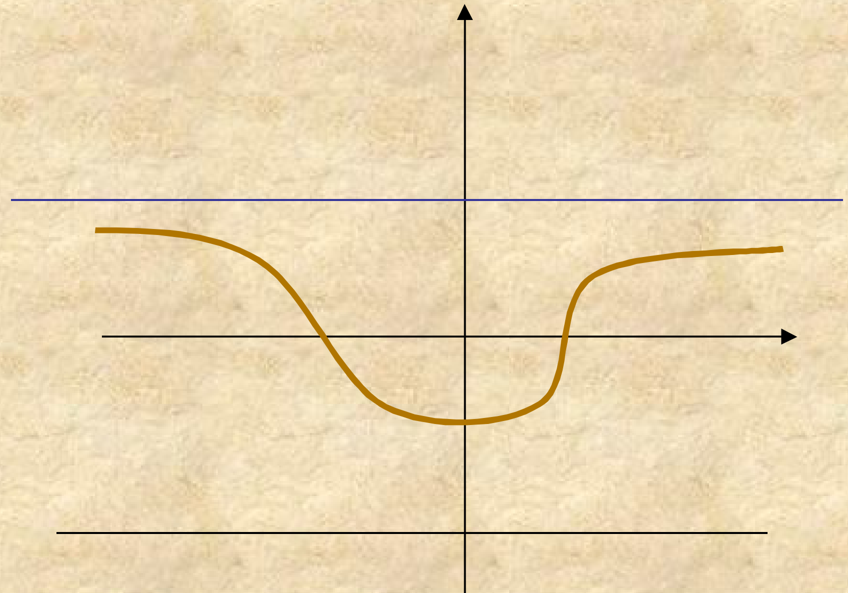
ت) اگر تابع f کراندار باشد ، آن را **بی کران** می نامیم .



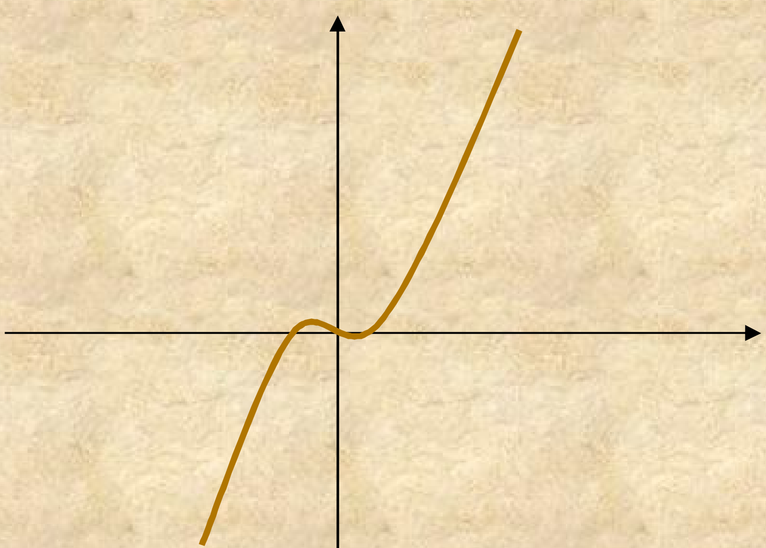
الف)تابع از بالا کراندار



ب) تابع از پایین کراندار



پ) تابع کراندار



ت) تابع بی کران

۳-۶-۷ مثال :

الف)اتوابع سینوس و کسینوس کراندار است ، زیرا به ازای هر عدد حقیقی x داریم

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad \text{و} \quad -1 \le \cos x \le 1$$

ب) تابع $f(x) = 2x^2 + 1$ از پایین کراندار است ، زیرا برای هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x) = 2x^2 + 1 \ge 1$$

پ) تابع $g(x) = 1 - x^2$ از بالا کراندار است ، زیرا برای هر عدد حقیقی x

داریم $$g(x) = 1 - x^2 \le 1$$

ت) تابع $h(x)=x^3+2$ که نه از بالا کراندار است نه از پایین بی کران

است زیرا هر دو خط افقی y=M و y=-M را که در نظر بگیریم ،

نقطه روی نمودار تابع h وجود دارد که در خارج ناحیه بین این دو خط

واقع است . مثلا نقطه $(\sqrt[3]{M+1}, M+3)$ روی نمودار تابع h قرار دارد

ولی بیرون از ناحیه بین دو خط $y=\pm M$ است .

۳-۶-۹ تعریف :

الف) تابع f را **صعودی** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f که داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ب) تابع f را **نزولی** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) > f(x_2)$$

پ) در صورتی که تابع f در هیچ یک از ویژگیهای (الف) و (ب) صدق نکند ، می گوییم f نه صعودی است نه نزولی .

۳-۶-۱۲ تعریف :

تابع $f: A \to B$ را **یک به یک** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ ایجاب کند که $x_1 = x_2$.

۳-۶-۱۳ مثال :

الف) تابع $f: R \to R$ با ضابطه تعریف $f(x) = 2x^3 - 5$ یک به یک است ، زیرا

به ازای هر x_1 و x_2 از R ، اگر داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$ یا

$$2x_1^3 - 5 = 2x_2^3 - 5$$

آنگاه بدست می آوریم

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ب) تابع $R \to R$ با ضابطه تعریف $g(x) = x^2 - 7$ یک به یک نیست ،

زیرا از تساوی $g(x_1) = g(x_2)$ به دست می آوریم

$$x_1^2 - 7 = x_2^2 - 7$$

که از ان نتیجه می شود $x_1^2 = x_2^2$ یا $x_1 = \pm x_2$. بنابر این x_1 و x_2 باهم

مساوی نیستند ، مثلا

$$g(-2) = (-2)^2 - 7 = -3$$

$$g(2) = 2^2 - 7 = -3$$

می بینیم که g(-2)=g(2) در حالی که $-2 \neq 2$ و بنابر این g یک به یک نیست

۳-۶-۱۴ تعریف :

تعریف ۳-۶-۱۲ را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم :

تابع $f : A \to B$ را **یک به یک** می نامیم اگر به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه

تابع f که $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم

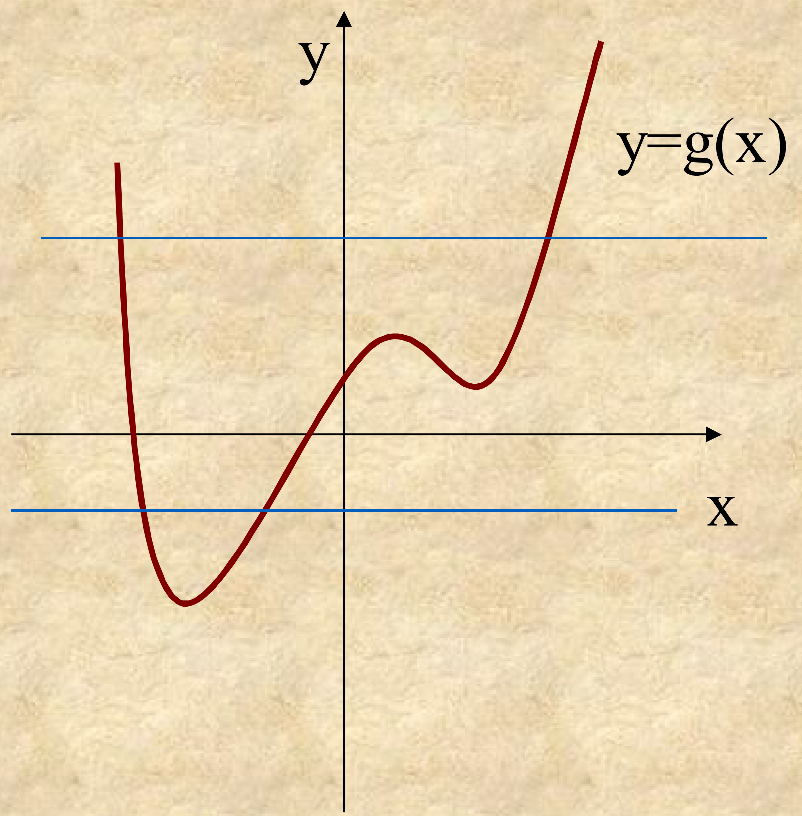
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

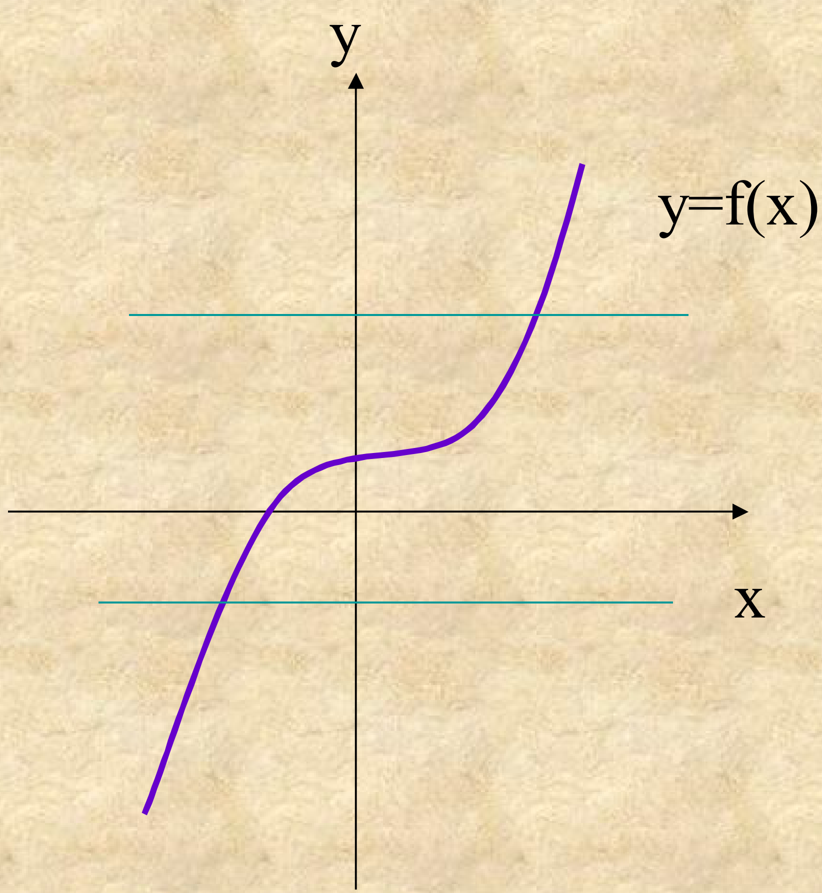
۳-۶-۱۵ مثال :

تابع $f(x) = |x|$ یک به یک نیست ،زیرا $1 \neq -1$ در حالی که $|1| = |-1|$

، یعنی $f(1) = f(-1)$

۳-۶-۱۶ تعبیر هندسی یک به یک بودن :





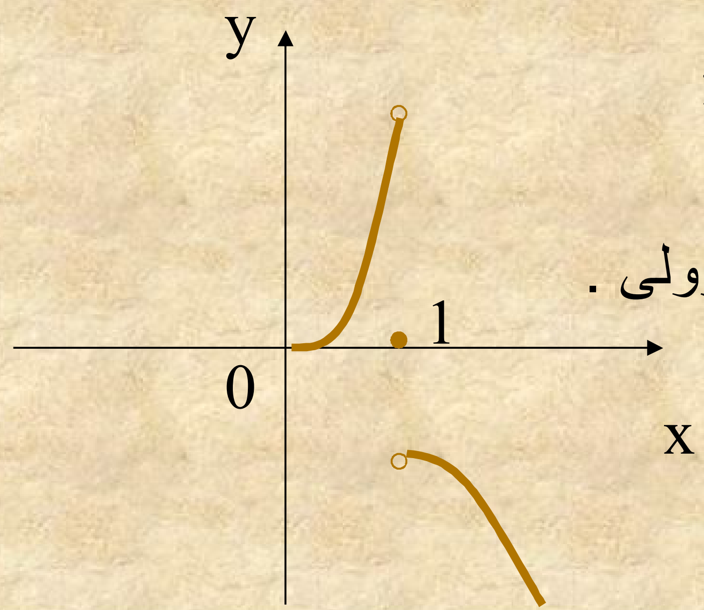
۳-۶-۱۸ قضیه :

اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد، آنگاه f یک به یک خواهد بود.

۳-۶-۲۰ نکته:

عکس قضیه ۳-۶-۱۸ برقرار نیست ، به بیان دیگر ، اگر تابعی یک به یک باشد ، الزاما صعودی یا نزولی نیست. برای مثال تابع:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \\ x^3 & x>1 \end{cases}$$



یک به یک است در حالی که نه صعودی است نه نزولی .

۳-۶-۲۱ تعریف :

تابع $f:A \to B$ را **پوشا** می نامیم اگر به ازای هر b از برد تابع f ، عضوی

مانند a از دامنه f وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم :

$$b=f(a)$$

۳-۶-۲۲ مثال :

الف) تابع $f:R \to R$ با ضابطه تعریف $f(x)=2x^3-5$ پوشاست. زیرا برای

هر b از برد تابع f یعنی R ، معادله b=f(a) یا

$$b=2a^3-5$$

دارای یک ریشه حقیقی $a=\sqrt[3]{\dfrac{b+5}{2}}$ است و داریم:

$$f(a)=2\left(\sqrt[3]{\frac{b+5}{2}}\right)^3-5=2\left(\frac{b+5}{2}\right)-5=b$$

چون برای هر عضو برد f مانند b ،عضوی از دامنه f مانند a وجود دارد

به گونه ای که b=f(a) پس f تابعی پوشاست.

ب) تابع $g:R\to R$ با ضابطه تعریف ، $g(x)=2x^2-1$ پوشا نیست، زیرا

اگر عضو دلبخواهی از برد g باشد از b=g(a) یا $b=2a^2-1$ نتیجه

می گیریم که : $a=\pm\sqrt{\frac{b+1}{2}}$

از اینجا مثلا به ازای b=-5 جوابی برای a بدست نمی آید، پس g پوشا

نیست. به عبارت دیگر ۵- عضوی از برد g است که تصویر هیچ عضوی

از دامنه g نیست.

۳-۷ وارون تابع

در این بخش وارون تابع را تعریف می کنیم و به بررســـی خواص آن می پردازیم.

۳-۷-۱ وارون تابع:

تابع $f: R \to R$ را در نظر می گیریم و آن را به صورت مجموعه ای

از زوجهای مرتب می نویسیم: $f = \{(x, y) | y = f(x)\}$

رابطه g را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g = \{(y, x) | y = f(x)\}$$

روشن است که اعضای رابطه g از تعویـــض مو لفه های اول و دوم

اعضای تابع f به دست می آیند .

اکنون می خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی g تابعی از B به A خواهد بود .

الف) برای هر $b \in B$ باید عضوی مانند a در A وجود داشته باشد به طوری که $(b, a) \in g$ که در این صورت خواهیم داشت b=f(a) . پس f باید پوشا باشد.

ب) اگر $(y, x_1) \in g$ و $(y, x_2) \in g$ باید داشته باشیم $x_1 = x_2$ به عبارت دیگر باید بتوان از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه گرفت که $x_1 = x_2$. پس f باید یک به یک باشد ، پس برای آنکه g تابعی از B به A باشد ، باید f تابعی یک به یک و پوشا باشد . بر عکس ، به آسانی می توان نشان داد که اگر f یک به یک و پوشا باشد ، g تابعی از B به A خواهد بود.

۳-۷-۲ تعریف :

اگر $f : R \to R$ تابعی یک به یک و پوشا باشد رابطه:

$$g = \{(y,x) | (x,y) \in f\}$$

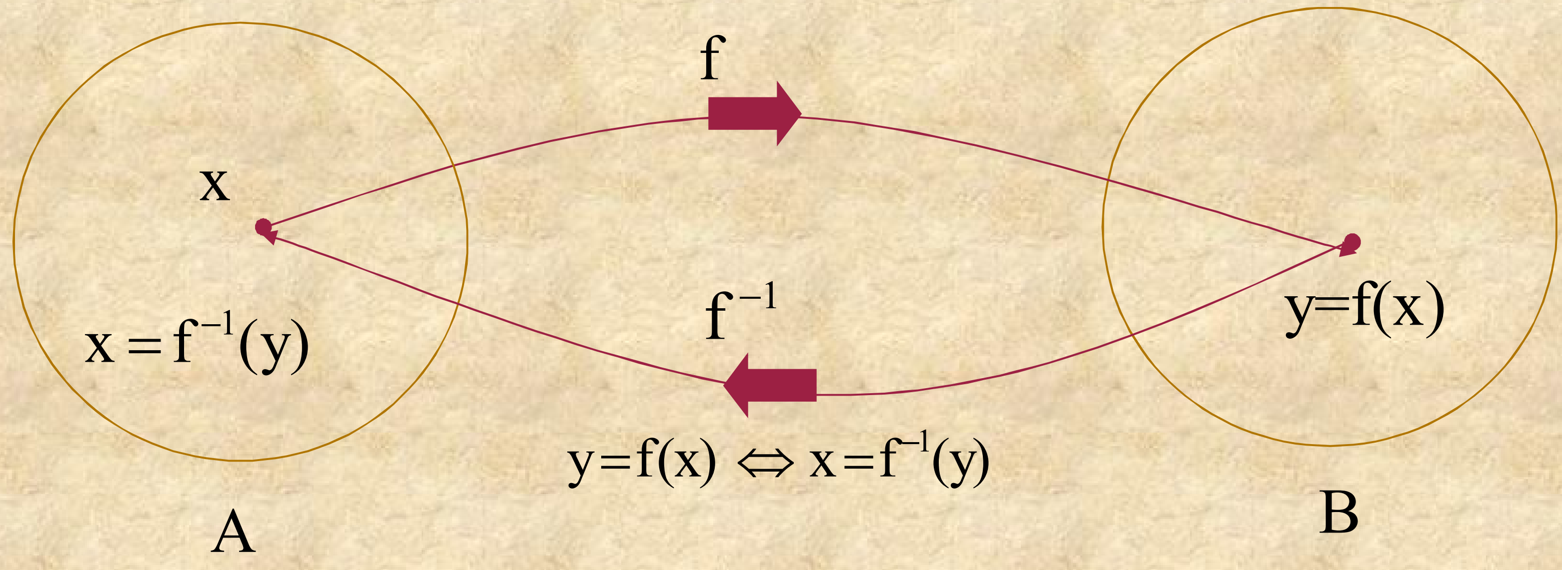
را که تابعی از B به A است **وارون تابع f** می نامیم و با نماد f^{-1}

نشان می دهیم.پس

$$f^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in f\} \quad , \quad f^{-1} : B \to A$$

دقت کنید که دامنه f^{-1} برابر با برد f و برد f^{-1} برابر با دامنه f است .

در شکل زیر وارون تابع توضیح داده شده است .


f
x
$x = f^{-1}(y)$
f^{-1}
$y=f(x)$
$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
A
B

۳-۷-۴ مثال :

تابع $f : R \to R$ با ضابطه تعریف $f(x) = x^3$ یک به یک و پوشاست(چرا؟)

پس دارای وارون است . برای محاسبه وارون این تابع ، معادله $y = x^3$

را بر حسب x حل می کنیم و به دست می آوریم:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

در تساوی اخیر، جای x و y را عوض می کنیم ، خواهیم داشت:

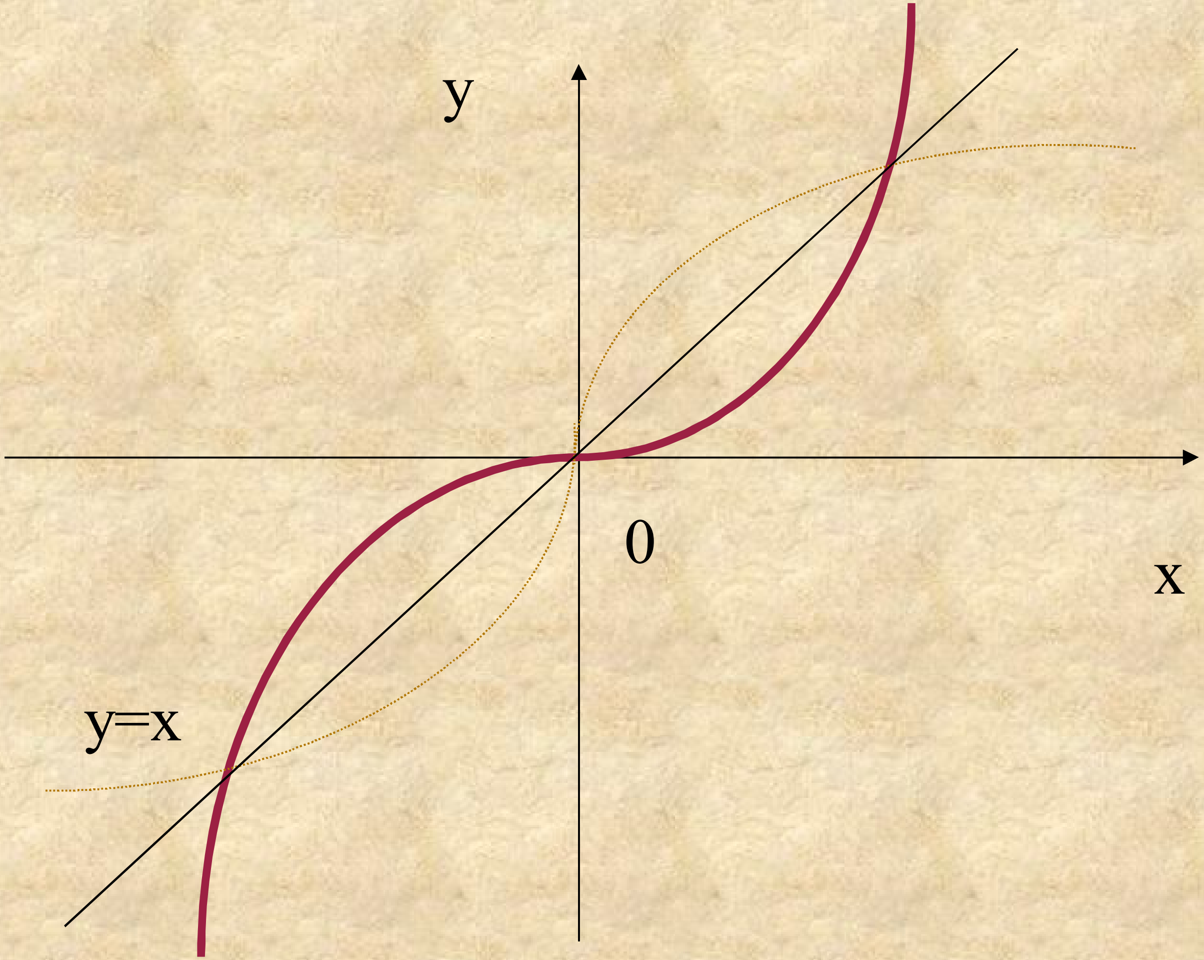
$$y = \sqrt[3]{x}$$

پس وارون f عبارت است از:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \ , \ f^{-1} : R \to R$$

نمودار های توابع f و f^{-1} در شکل زیر رسم شده است .

توجه کنید که نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط y=x قرینه اند.



۳-۷-۶ وارون تابع نمایی a^x:

فرض می کنیم $f : R \to R^+$ با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a>0$ و $a \neq 1$
تعریف می شود .

الف) تابع f یک به یک است ، زیرا تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ یا $a^{x_1} = a^{x_2}$
نتیجه می شود

ب) تابع f پوشاست ، زیرا اگر b عضو دلبخواهی از برد f باشد ، از
b=f(x) یا $b = a^x$ نتیجه می شود $x = \log_a^b$ و داریم:

$$f(x) = a^{\log_a^b} = b$$

از (الف) و(ب) نتیجه می شود که تابع f دارای وارون است .

برای محاسبه وارون f ، از معادله $y = a^x$ مقدار x را برحسب y تعیین می کنیم :

$$y = a^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_a^{\,y} = f^{-1}(y)$$

اکنون در تساوی اخیر جای x و y را عوض می کنیم، خواهیم داشت:

$$y = \log_a^{\,x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_a^{\,x}$$

بنابراین ، وارون تابع نمایی a^x تابع لگاریتمی $\log_a^{\,x}$ است و بر عکس.

۳-۷-۷ نتیجه :

۱) دو تابع $y=\ln x$ و $y = e^x$ بنابر ۳-۷-۶ وارون یکدیگرند.

۲) دو تابع $y=\log x$ و $y = 10^x$ بنابر ۳-۷-۶ وارون یکدیگرند.

فصل چهارم

حد و پیوستگی توابع

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که با مفهوم حد تابع، قضیه های حدی ،حدهای چپ وراست تابع ،حد در بینهایت، و پیوستگی تابع در بینهایت وپیوستگی تابع در یک نقطه حقیقی ودر یک بازه آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار می رود پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱)مفهوم حد را توضیح بدهید.

۲) حد تابع را در نقطه متناهی یا در $\pm\infty$ تعریف کنید.

۳) حد تابع را در نقطه متناهی یا در $\pm\infty$ محاسبه کنید.

۴)قضایای حد را بیان کنید وآنها را در محاسبه حد به کار ببرید.

۵) صورتهای مبهم یا نامعین حدی را تشخیص بدهید ومقدار واقعی حد داده شده را محاسبه کنید.

۶) حدهای راست و چپ را تعریف کنید ورابطه میان حدهای یک طرفه و حد تابع را توضیح دهید وآن را در حل مسائل به کار ببرید

۷) مفهوم پیوستگی تابع را در یک نقطه توضیح بدهید.

۸) رابطه بین پیوستگی تابع در یک نقطه وحد تابع در آن نقطه را بیان کنید.

۹) نقاط پیوستگی و نا پیوستگی توابع داده شده را تعیین کنید.

۱۰) پیوستگی از راست واز چپ را توضیح بدهید.

۱۱) پیوستگی تابع را در بازه های باز و بسته تعریف کنید.

۱۲) قضیه های پیوستگی را تعریف کنید و آنها را در حل مسائل به کار ببرید.

مقدمه:

مفهوم حد یکی از مفاهیم اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال است . در این فصل ابتدا با مفهوم حد به طور شهودی آشنا می شویم و سپس پیوستگی تابع را بررسی می کنیم

۱-۴ حد تابع

۴-۱-۱ مقدمه:

گاهی لازم است رفتار تابعی را در نزدیکی نقطه ای بررسی کنیم تا معلوم شود

که وقتی متغیر مستقل به آن نقطه نزدیک می شود مقادیر تابع به عدد ثابتـــی

نزدیک می شوند یا نه.ابتدا با یک مثال مفهوم شهودی حد را توضیح می دهیم.

۴-۱-۲ مثال:

تابع $f : R \to R$ با ضابطه تعریف $f(x)=2x-3$ را در نظر می گیریم.

می خواهیم رفتار این تابع را هنگامی که x به عدد ۲ نزدیک می شود بررسی کنیم.

حل:

به این منظور جدولی از مقادیر f را به ازای xهايي که به اندازه دلبخواه به عدد ۲ نزدیک باشند تشکیل می دهیم:

x	1/9	1/99	1/999	1/9999	2
F(x)	0/8	0/98	0/998	0/9998	1

x	2/0001	2/001	2/01	2/1
F(x)	1/0002	1/002	1/02	1/2

جدول بالا نشان می دهد هر قدر x به عدد ۲ نزدیکتر باشد مقدار $f(x)$ به عدد یک نزدیکتر می شود . به عبارت دیگر می توانیم مقادیر $f(x)$ را تا هر اندازه که بخواهیم به عدد ۱ نزدیک کنیم به شرطی که x رابه اندازه کافی نزدیک به عدد ۲ نه لزوما برابر با ۲ انتخاب کنیم. به بیان ریاضی $|f(x)-1|$ را می توانیم به دلخواه کوچک کنیم مشروط براینکه $|x-2|$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم.

۴-۱-۳ تعریف:

عدد L را حد تابع f در a مي ناميم اگر برای هر $0 > \varepsilon$ عدد مثبتی مانند δ

(معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

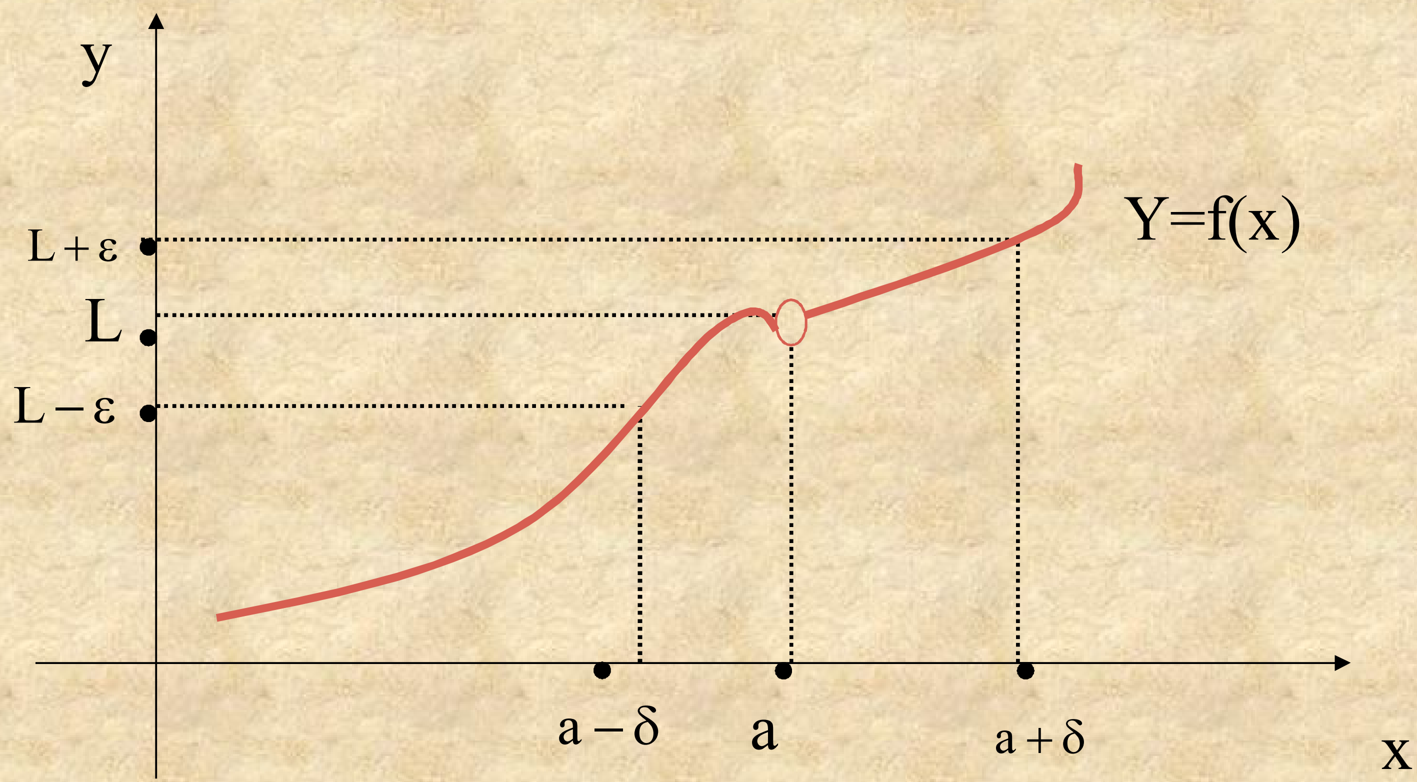
$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

و می خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر L است .

✪توجه کنید که $0<|x-a|<\delta$ به معنای $x \neq a$ و $|x-a|<\delta$ است .



بنابر شکل ۴-۱ اگر حد تابع f وقتی که x به a میل میکند برابر L باشد

آنگاه وقتی x بر محور افقی بین $a-\delta$ و $a+\delta$ واقع باشد $f(x)$ بر محور

قائم بین $L+\varepsilon$ و $L-\varepsilon$ قرار خواهد داشت.

۴-۱-۵ مثال

نشان بدهید که تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد.

حل:

فرض می کنیم حد تابع f در $x=0$ برابر L باشد (فرض خلف) . پس بنابر

تعریف حد برای هر $\varepsilon>0$ از جمله $\varepsilon=\frac{1}{2}$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به

گونه ای که:

$$0<|x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

اما $0<|x|<\delta$ معادل با $x\neq 0$ و $-\delta<x<\delta$ است . اکنون اگر $-\delta<x<0$ آنگاه

$f(x)=3x-1$ در نتیجه بنابر (۱) داریم :

$$|f(x)-L|=|3x-1-L|<\frac{1}{2}$$

واگر $0<X<\delta$ آنگاه $f(x)=3x+1$ و در نتیجه بنابر (۱) داریم:

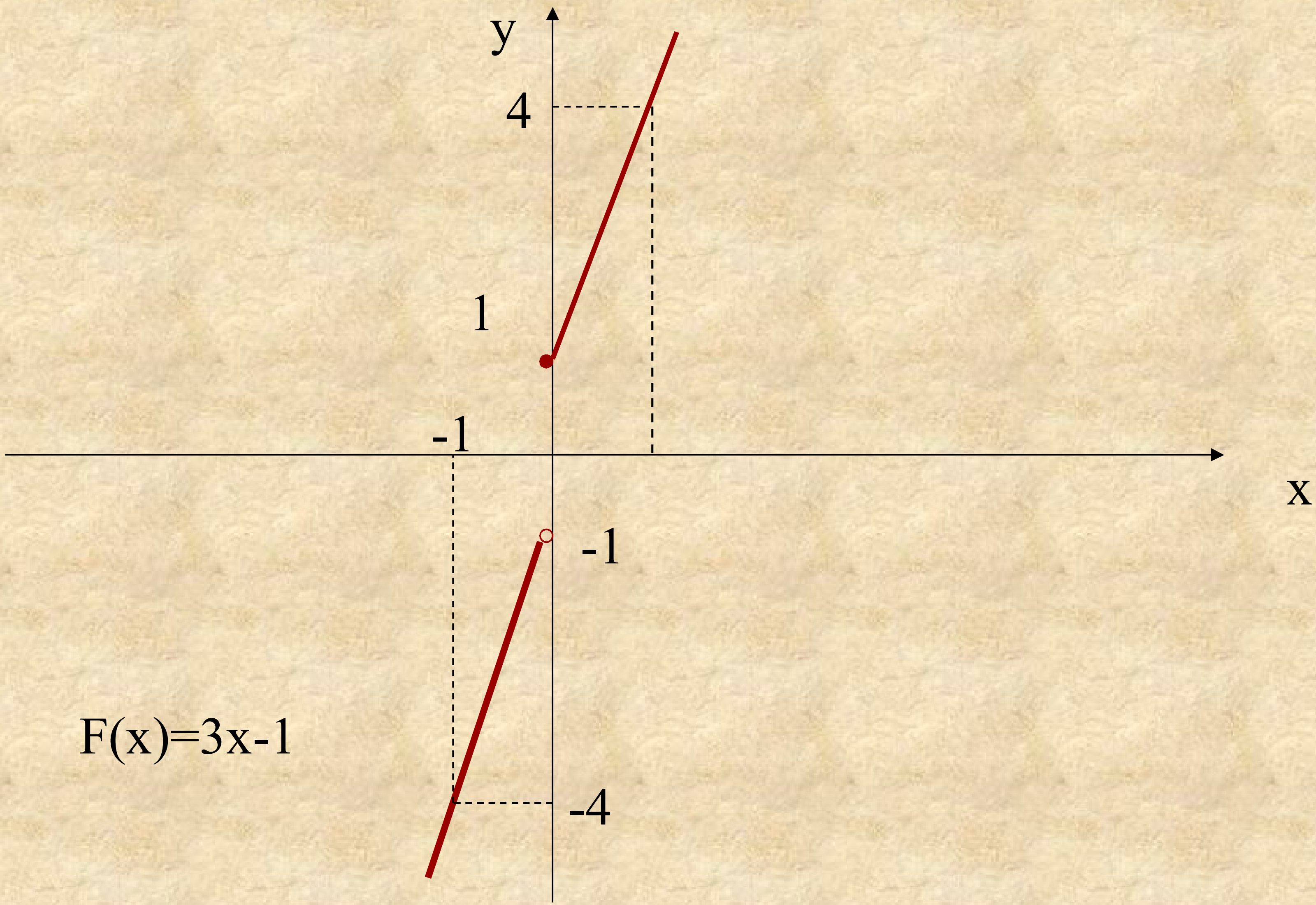
$$|f(x)-L|=|3x+1-L|<\frac{1}{2}$$

از روابط بالا به دست می آوریم:

$$2=|1+1|=|1+1+(3x+L)-(3x+L)|$$
$$=|(3x+1-L)+(-3x+1+L)|$$
$$\leq|3x+1-L|+|-3x+1+L|$$
$$=|3x+1-L|+|3x-1-L|$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

که این یک تناقض است .بنابر این فرض خلف باطل است و f در $x=0$

حد ندارد. به شکل اسلاید بعدی نگاه کنید:



$F(x)=3x-1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to} h(x) = 4$$

۲-۴قضایایی در باره حد تابع

۴-۲-۱ مقدمه:

محاسبه مقدار حد تابع با استفاده از تعریف حد و به کمک ε و δ غالبا طولانی و پیچیده است . در این بخش قضیه هایی را در مورد حد بیان می کنیم و با روشهای محاسبه حدهای توابع آشنا می شویم. از اثبات این قضیه ها صرف نظر کرده ایم.

۴-۲-۲ قضیه :

فرض می کنیم $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ هر دو موجود باشند. در این صورت:

الف) اگر c عدد ثابتی باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$$

ب) اگر r عدد حقیقی مثبت باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^r = [\lim_{x\to a} f(x)]^r$$

پ)

$$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

ت)
$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

ث)
$$\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x))$$

ج) اگر $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ آنگاه :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

چ)
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right|$$

ح) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه :

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

✪در این رابطه اگر n زوج باشد، $\lim_{x \to a} f(x)$ باید مثبت باشد.

۴-۲-۳ قضیه :

اگر m , n و a سه عدد دلبخواه باشند ، آنگاه :

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n$$

۴-۲-۸ نکته:

بنابر نتیجه ۴-۲-۷ برای تعیین حد یک تابع چند جمله ای یا تابع گویا،

کافی است مقدار تابع را در نقطه مورد نظر محاسبه کنیم. البته مشروط

بر اینکه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد. برای مثال داریم:

$$\lim_{x\to -1}(2x^4-3x^3+x^2-5x+2)=2(-1)^4-3(-1)^3+(-1)^2-5(-1)+2$$
$$=13$$

همچنین چون $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{4x^3-3x+7}$ تابعی گویاست، داریم :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+4}{4x^3-3x+7}=\frac{(1)^2-3(1)+4}{4(1)^3-3(1)+7}$$
$$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

۴-۲-۹ تذکر:

در اکثر موارد ، قبل از اینکه بتوانیم قضیه های حد را به کار ببریم ، لازم است که ضابطه تعریف تابع داده شده را ساده کنیم به مثال زیر توجه کنید:

۴-۲-۱۰ مثال :

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

حل:

الف) تابع $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ در x=3 تعریف نشده است .زیرا $\dfrac{(3)^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$

نامعین است .این امر مشکلی به وجود نمی آورد. زیرا حد این تابع وقتی x

به ۳ میل می کند تنها به مقادیر x در نزدیکی ۳ بستگی دارد و مقدار x=3

را شامل نمی شود. از طرفی می دانیم :

$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$

پس به ازای $x\neq 0$ داریم :

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

(ب) چون به ازای $x=0$ مخرج کسر به صفر میل می کند نمی توانیم قضیه

۴-۲-۲ (ج) را مستقیما به کار ببریم ، ولی با اســتفاده از یک فن جبری

می توانیم این حد را قابل محاسبه کنیم. به این منظور، صورت و مخرج کسر

را در مزدوج صورت یعنی $\sqrt{x+9}+3$ ضرب می کنیم وبه دست می آوریم:

$$\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

که به ازای $x\neq 0$ داریم :

$$=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

اکنون بنابر قضیه ۴-۲-۲ (ج) خواهیم داشت:

$$= \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} (\sqrt{x+9} + 3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \to 0}(x+9)} + \lim_{x \to 0} 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

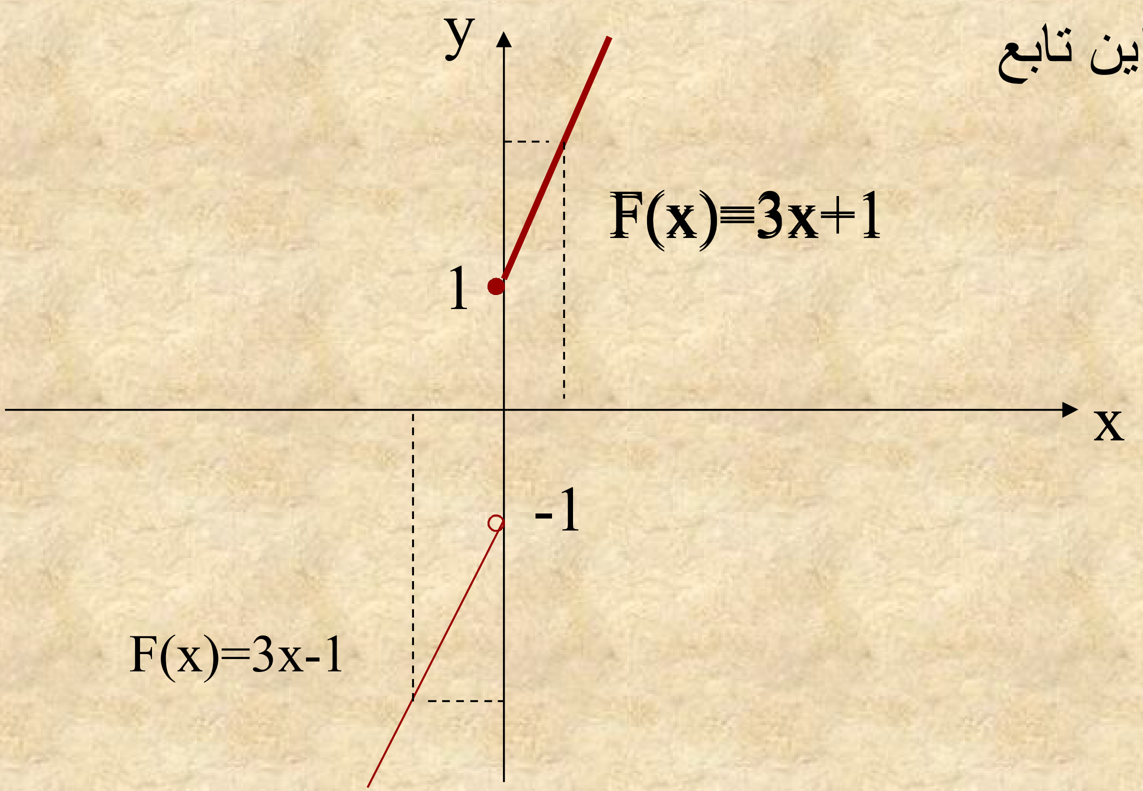
۳-۴حدهای یک طرفه

۴-۳-۱مقدمه

تابع f را با ضابطه زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 0\\ 3x-1 & x<0\end{cases}$$

در۴-۱-۵ نشان دادیم که این تابع در$x=0$ حد ندارد.



چنان که در شکل دیده می شود، وقتی که x از سمت راست به صفر نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می شود، و هنگامی که x از سمت چپ (از طرف اعداد منفــی) به صفر نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد (۱-) نزدیک می شود. در این صورت می گوییم حد راست تابع f در نقطه ۰ برابر با ۱ و حد چپ تابع f در نقطه ۰ برابر با (۱-) است .

اکنون به تعریف حدهای راست و چپ تابع که حدهای یک طرفه نامیــده می شوند می پردازیم.

۴-۳-۲ تعریف :

فرض می کنیم تابع f در بازه (a , b) تعریف شده باشد ، اگر برای هر

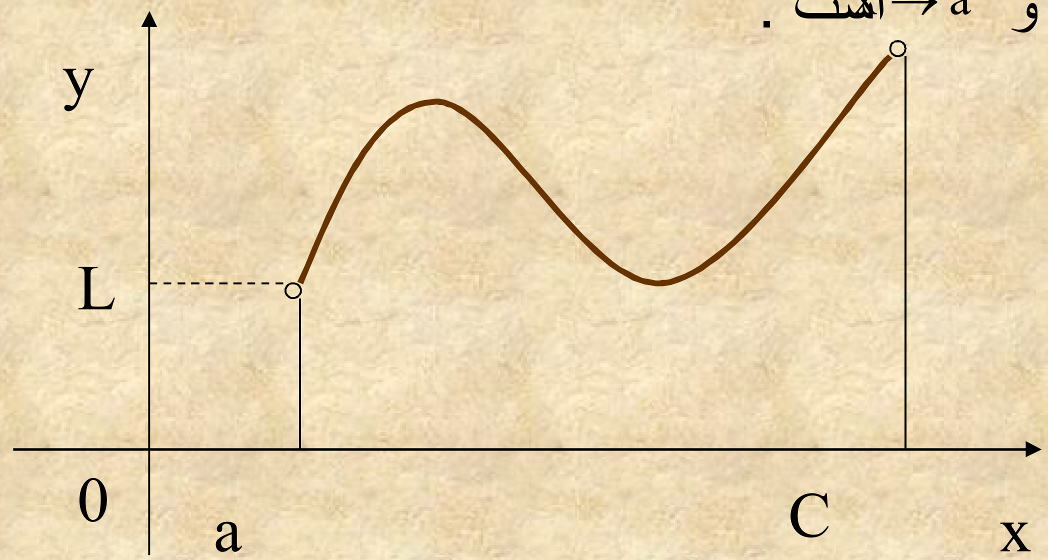
عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد راست تابع در نقطه x=a می نامیم.ومی نویسیم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

نماد $x \to a^+$ به معنای $x > a$ و $x \to a$ است .



۴-۳-۳ تعریف :

فرض می کنیم تابع f در بازه (a , b) تعریف شده باشد .اگر برای هر $\varepsilon > 0$

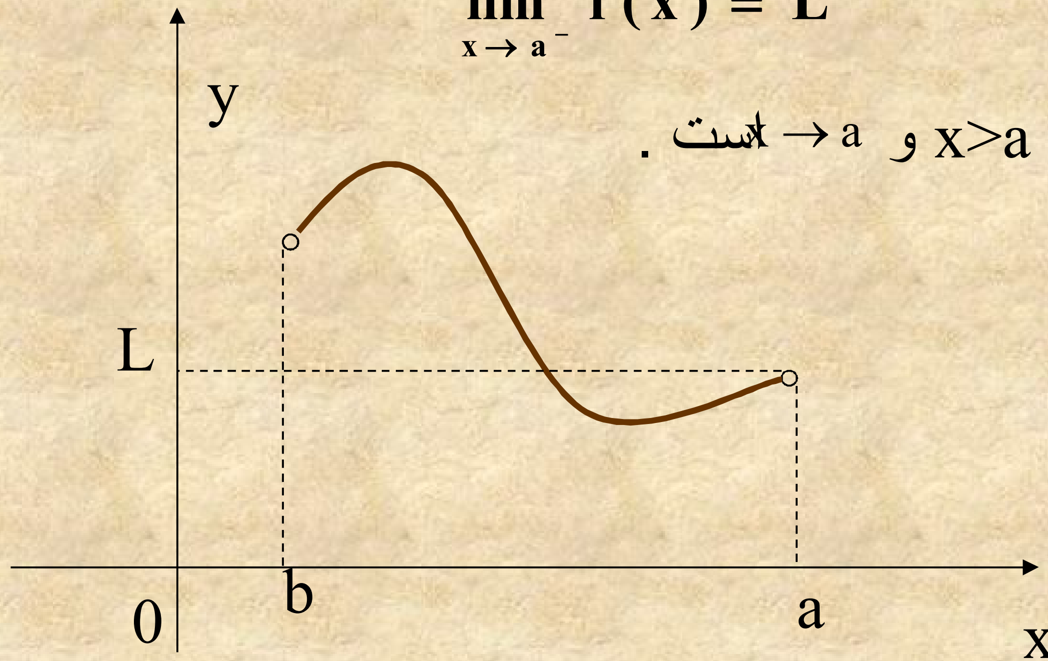
عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد چپ تابع در نقطه x=a می نامیم.ومی نویسیم:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

نماد $x \to a^-$ به معنای x>a و $x \to a$ است .



۴-۳-۴ نکته:

تمام قضيه هايي كه در بخش ۴-۲ بيان كرديم با قرار دادن $x \to a^-$ يا $x \to a^+$

به جای $x \to a$ همچنان معتبرند.

۴-۳-۵ مثال :

تابع f با ضابطه تعريف زير را در نظر بگيريد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x \geq 1 \\ 5x - 2 & x < 1 \end{cases}$$

حد چپ و حد راست تابع f را در صورت وجود در $x=1$ تعيين كنيد.

حل:

برای محاسبه حد راست تابع f در x=1 یعنی $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ چون $x \to 1^+$

پس $x \to 1$ و x>1 . در این حالت داریم f(x)=3x+2 وبنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x+2) = 3(1)+2 = 5$$

برای محاسبه حد چپ تابع f در x=1 یعنی $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ چون $x \to 1^-$ پس

$x \to 1$ و x<1 . در این حالت داریم f(x)=5x-2 و بنابراین :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(5x-2) = 5(1)-2 = 3$$

به طوری که ملاحظه می شود حد چپ و حد راست تابع f در x=1 با هم برابر نیستند.

۴-۳-۸ مثال :

بنابر نتیجه ۴-۳-۷ (الف) تابع fدر مثال ۴-۳-۵ در نقطه x=1 حد ندارد.

روشن است که این تابع در هر نقطه حقیقی به استثنای x=1 دارایحد است.

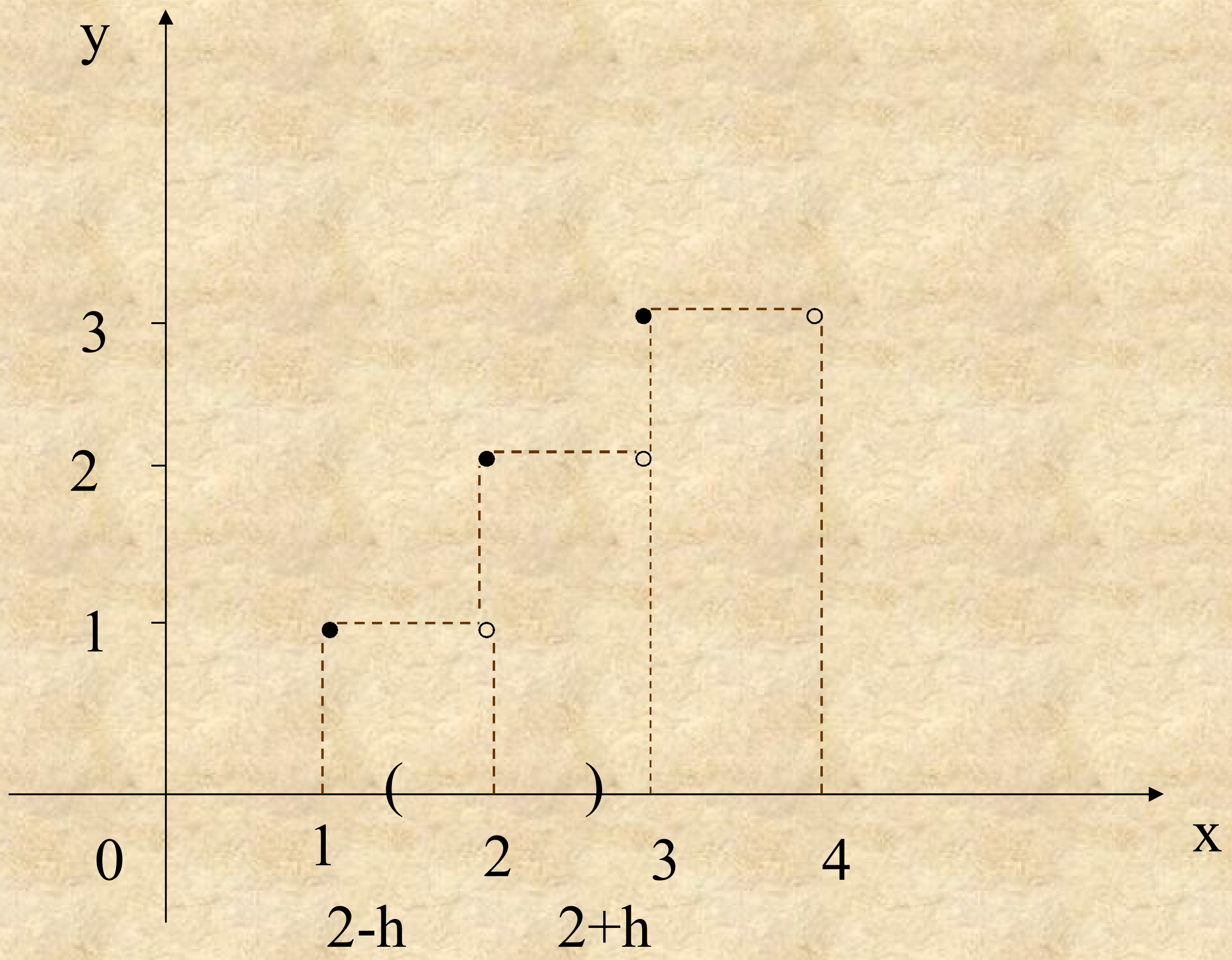
۴-۳-۹ نکته:

تابع جزء صحیح $x \in R \quad f(x)=[x]$ را در نظر می گیریم. می خواهیم حد چپ

و حد راست f را در نقطه x=2 تعیین کنیم.

یادآوری می کنیم که منظور از جزء صحـــیح x، بزرگترین عدد صحیح

نابزرگتر از x است .


y
3
2
1
0
1
2
3
4
x
2-h
2+h

به طوری که در شکل دیده می شود، تابع f هنگامی که x به سمت۲ میل

می کند دارای حد نیست زیرا وقتی که x برابر ۲ یا کمی بزرگتر از ۲

اختیار شود مقادیر تابع f بسیار نزدیک به ۲ خواهند بود. اما هنگامی که

x اندکی کوچکتر از ۲ ،مثلا ۱/۹۹۹ باشد داریم $[x]=1$ به عبارت دیگر

اگر h عددی مثبت و کوچکتر از یک باشد ،یعنی $0<h<1$ ،آنگاه :

به ازای هر x که $2-h<x<2$ داریم : $[x]=1$

به ازای هر x که $2<x<2+h$ داریم : $[x]=2$

در نتیجه بنابر تعریف های ۴-۳-۳ و۴-۳-۲، حد چپ و حد راست f

در $x=2$ برابرند با:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [x] = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} [x] = 2$$

چون حد چپ و حد راست تابع جزء صحیح در $x=2$ برابر نیستند، این

تابع بنابر نتیجه ۴-۳-۷ (الف) در $x=2$ حد ندارد.

به همین ترتیب به ازای هر عدد صحیح n می توان نشان داد که تابع [x] در x=n حد ندارد و داریم :

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 \qquad n \in Z$$

$$\lim_{x \to n^+} [x] = n \qquad n \in Z$$

روشن است که تابع جزء صحیح در هر عدد حقیقی غیر صحیح دارای حد است . برای مثال :

$$\lim_{x \to 2/5^-} [x] = 2 \qquad , \qquad \lim_{x \to 2/5^+} [x] = 2$$

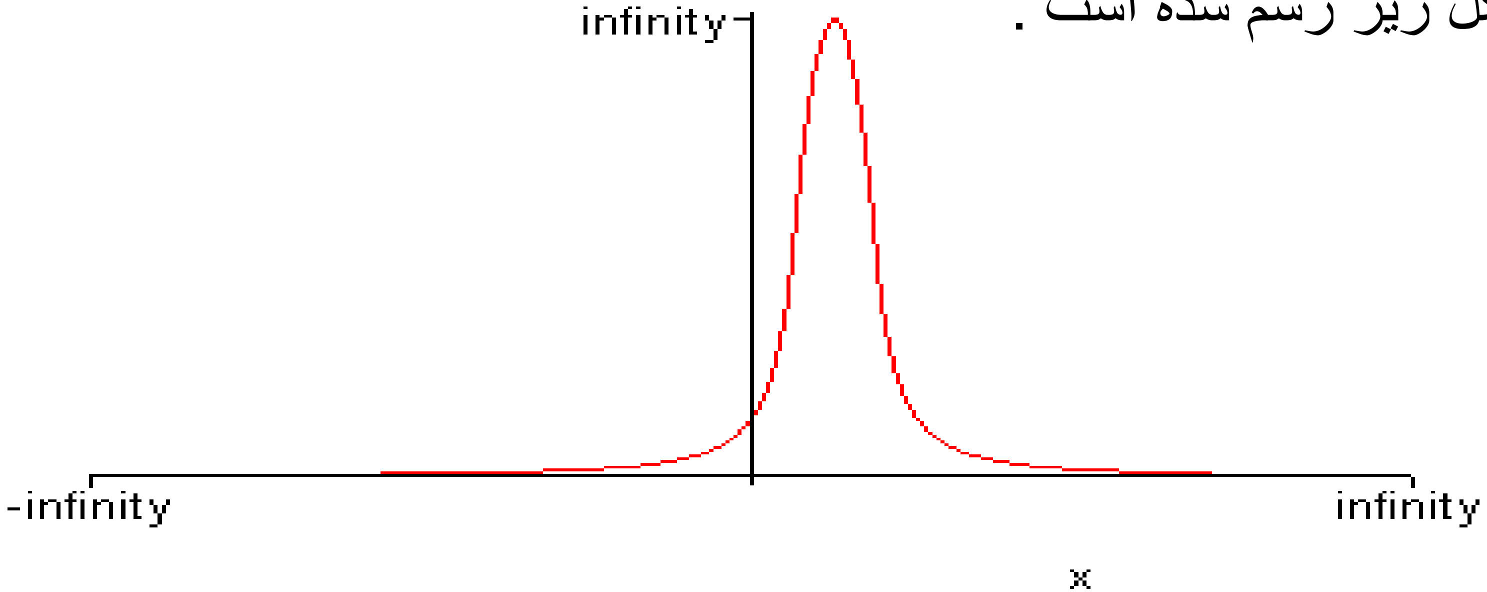
در نتیجه، بنابر قضیه ۴-۳-۶ داریم :

$$\lim_{x \to 2/5} [x] = 2$$

۴-۴حدهای بینهایت

۴-۴-۱ مثال:

تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را در نظر می گیریم. نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است .



اکنون مقادیر f را هنگامی که x نزدیک به یک باشد بررسی می کنیم.
به جدول زیر توجه کنید:

X	2	1/5	1/3	1/1	1/01	1/001	1/0001
F(x)	1	4	$\frac{9}{100}$	100	10^4	10^6	10^8

به طوری که در جدول بالا می بینیم، هر قدر x از سمت راست به ۱ نزدیکتر شود، مقدار f(x) بزرگتر می شود .به این ترتیب می توان f(x) را بی اندازه بزرگ کرد مشروط بر آنکه x بی اندازه از سمت راست به یک نزدیک شود. این خاصیت را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

اکنون مقادیر $f(x)$ را هنگامی که x از سمت چپ نزدیک به یک باشد بررسی می کنیم. به جدول زیر توجه کنید:

X	۰	0/5	0/7	0/9	0/99	0/999	0/9999
F(x)	1	4	$\frac{9}{100}$	100	10^4	10^6	10^8

به طوری که درجدول بالامی بینیم هر قدر x از سمت چپ به ۱نزدیکتر

شود، مقدار $f(x)$ بزرگتر می شود.این خاصیت را با نماد زیر نشـان

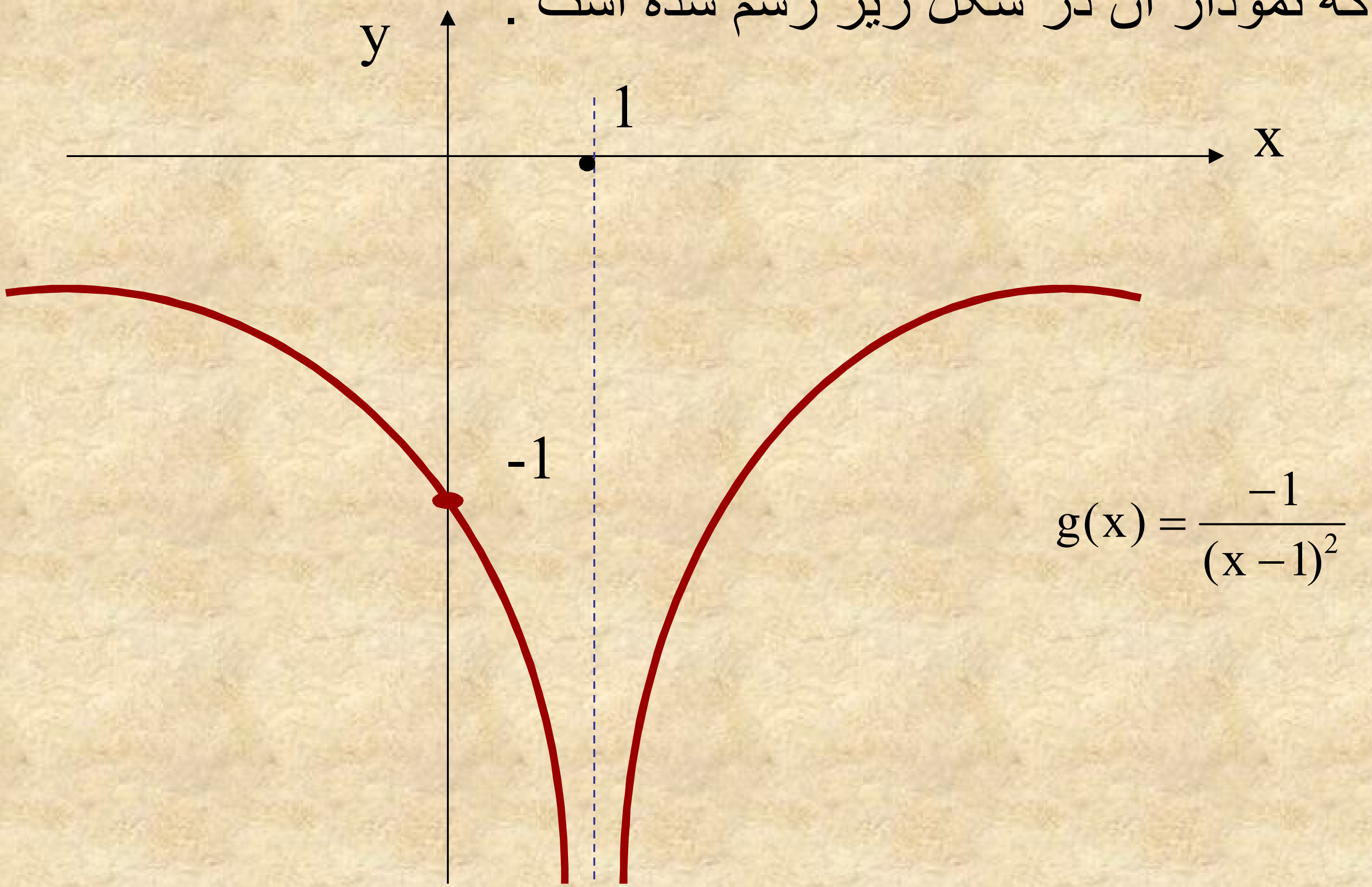
می دهیم :

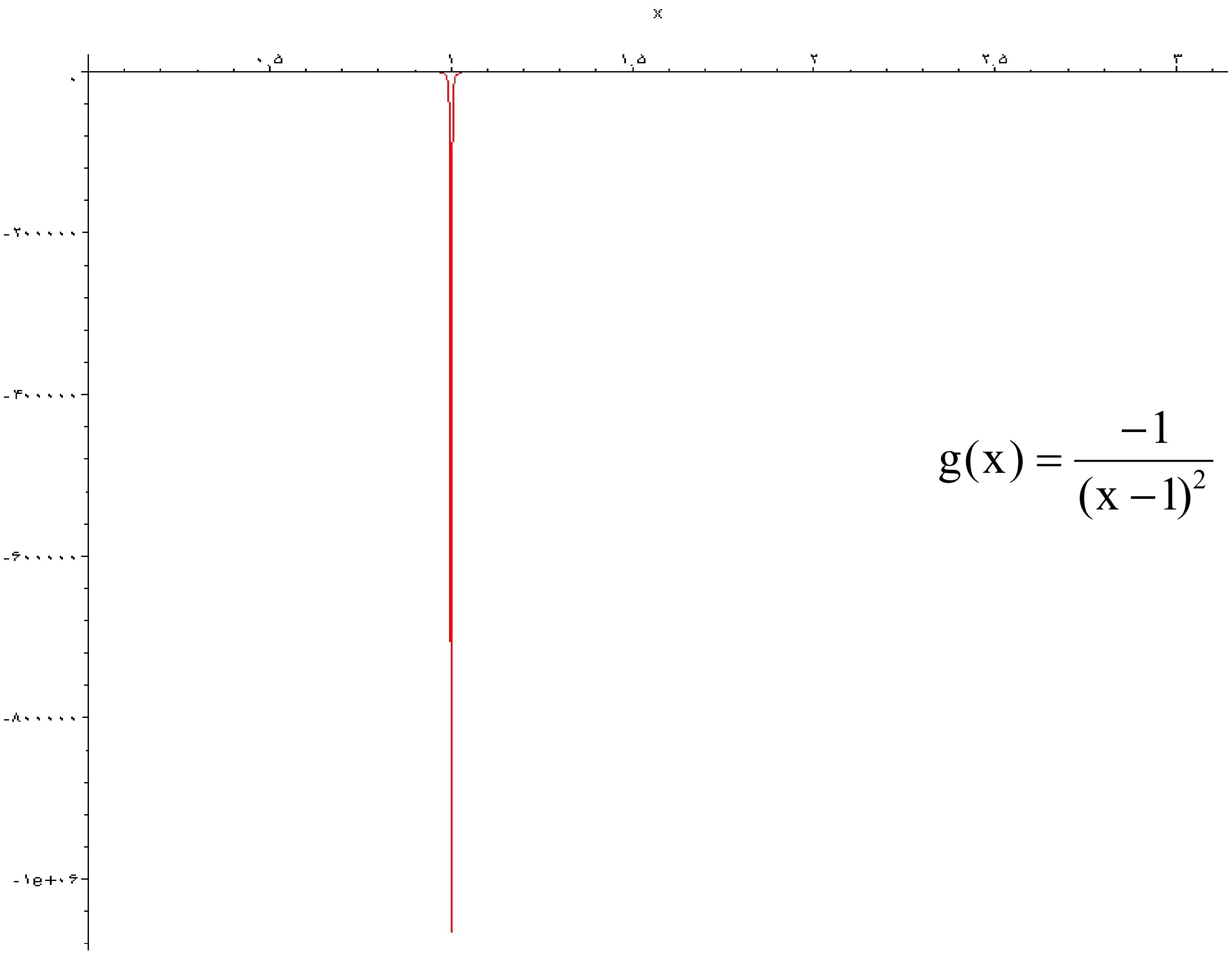
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

۴-۴-۳ مثال :

با روشی مشابه مثال ۴-۴-۱ می توان رفتار تابع $g(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ در نزدیکی نقطه یک بررسی کرد.

تابع g که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است .





$$g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

مشاهده می کنیم هنگامی که x نزدیک به عدد یک شود مـــقدار $g(x)$

بی اندازه کوچک می شود. این خاصییت را به صورت زیر نشـــان می دهیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$$

۴-۴-۴ تعریف :

اگر برای هر $M<0$ ،عدد مثبتی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد. به طوری که :

$$0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)<M$$

آنگاه حد تابع f را هنگامی که x به سمت a میل می کند ،بینهایت منفی

می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

۴-۴-۵ تذکر:

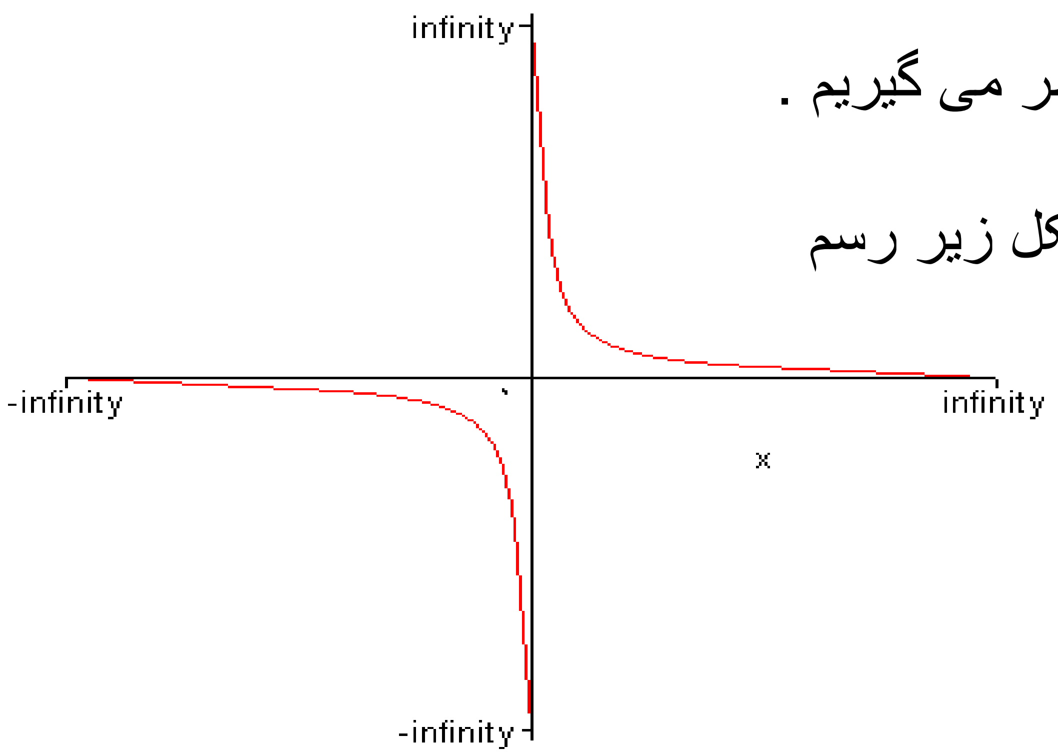
وقتی که داشته باشیم $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

می گوییم f در a حد ندارد،زیرا ∞ یا $-\infty$ اعدادی حقیقی نیستند .

۴-۴-۶ مثال :

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم .

نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است .



چنان که در شکل دیده می شود، هنگامی که x از سمت راست به صفر نزدیک می شود ، مقادیر تابع بزرگ و بزرگتر می شوند، یعنی داریم :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود ،مقادیر تابع منفی اند و کوچک وکوچکتر می شوند، یعنی داریم

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

4-4-8 قضیه :

اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد ، آنگاه داریم:

الف)
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

ب)
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

قضیه بالا را می توان به صورت زیر تعمیم داد.

۴-۴-۹ قضیه :

الف) اگر تابع f در حالی که همواره مثبت است ، به سمت صفر میل کند آنگاه :

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ب) اگر تابع f در حالی که همواره منفی است ، به سمت صفر میل کند آنگاه :

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

۴-۴-۱۳ مثال :

حد $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ را محاسبه کنید.

حل:

داریم :

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to 2^-}\left(4-x^2\right)}=\sqrt{0}=0$$

و

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0$$

چون $x\to 2^-$ پس $x<2$ و $x\to 2$ و در نتیجه $x^2<4$ یا $4-x^2>0$ و داریم :

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{(2-x)(2+x)}{-(2-x)\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{-(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

چون $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$ در حالی که $\sqrt{4-x^2}$ همیشه مثبت است به سمت

صفر میل می کند ، بنابر قضیه ۴-۴-۹ (الف) داریم :

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\left(\lim_{x\to 2^-}-(2+x)\right)\left(\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)=-4(+\infty)=-\infty$$

۵-۴حد در بینهایت

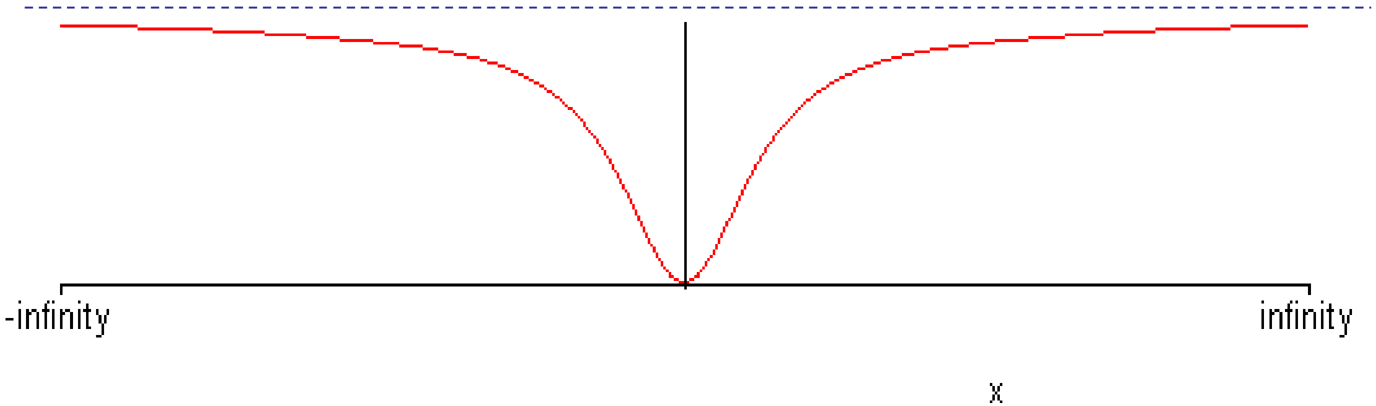
۴-۵-۱ مقدمه:

در این بخش به بررسی رفتار تابعی مانند f هنگامی که x به اندازه کافی بزرگ شود ، می پردازیم . وقتی می گوییم x مقادیر بزرگ را به دلخواه اختیار می کند ، منظور این است که x از هر مقدار مثبت دلبخواه مانند M بزرگتر باشد ، و در این صورت می نویسیم: $x \to +\infty$

هر گاه x هر مقدار دلبخواه کوچکتر از هر عدد منفی مانند $N<0$ را اختیار کند ، می گوییم x به بینهایت میل می کند و می نویسیم: $x \to -\infty$

۴-۵-۲ مثال :

تابع $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ را در نظر می گیریم . نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است .



در جدول زیر مقادیر f(x) ، برای بعضی مقادیر بزرگ x محاسبه شده است .

x	۱۰	100	1000	10000
F(x)	$\frac{300}{101}$	$\frac{30000}{100001}$	$\frac{3000000}{1000001}$	$\frac{300000000}{100000001}$

به طوری که در جدول بالا می بینیم ، به تدریج که مقادیر مثبت x بزرگتر

می شوند ، مقادیر f(x) به عدد ۳ نزدیکتر می شوند . این خاصیت را به

صورت زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

در جدول زیر مقادیر $f(x)$ برای بعضی مقادیر کوچک ومنفی x محاسبه کرده ایم:

x	-10	-100	-1000	-10000
$F(x)$	$\frac{300}{101}$	$\frac{30000}{100001}$	$\frac{3000000}{1000001}$	$\frac{300000000}{100000001}$

توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم $f(-x)=f(x)$ ،یعنی f تابعی زوج

است . بنابراین به تدریج که مقادیر منفی x کوچکتر می شوند، مقادیر $f(x)$

به عدد ۳ نزدیک می شوند . این خاصیت را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2+1}=3$$

۴-۵-۴ تعریف :

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند M (معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد تابع f ،هنگامی که x به سمت بینهایت مثبت میل می کند، می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

۴-۵-۴ تعریف :

اگر برای هر $\varepsilon > 0$،عدد مانند $N<0$ (معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه عدد L را حد تابع f ،هنگامی که x به سمت بینهایت منفی میل می کند، می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

۴ـ۵ـ۵ قضیه :

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم :

الف)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ب)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

تعمیم قضیه بالا به صورت زیر است .

۴ـ۵ـ۶ قضیه :

فرض می کنیم a عددی حقیقی یا یکی از نمادهای ∞ یا $+\infty$

باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

آنگاه :
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

۴-۵-۷ تذکر:

تمام قضیه هایی که درباره حد در بخشهای ۴-۲ و ۴-۴ دیدیم در مورد حدهایی که در آنها $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ نیز صدق می کند.

۴-۵-۸ مثال :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+4}{2x-1}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} [3+\frac{4}{x}]}{\lim\limits_{x \to +\infty} [2-\frac{1}{x}]} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + 4 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3+4(0)}{2-0} = \frac{3}{2}$$

۴-۵-۱۰ مثال :

حد $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 3x}{2x + 1}$ را محاسبه کنید.

حل:

برای محاسبه حد داده شده ، صورت و مخرج کسر را بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 - \frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

اکنون حد صورت ومخرج را جداگانه در نظر می گیریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(5 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} 5 - 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 5 - 3(0) = 5$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 2(0) + 0 = 0$$

حد صورت عدد مثبت ۵ است و مخرج در حالی که همواره مثبت است

به صفر میل می کند ، در نتیجه بنا بر قضیه ۴-۴-۹ (الف) داریم :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{2x + 1} = +\infty$$

نتایج حاصل از سه مثال اخیر را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۴-۵-۲۱مثال :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}$$

از $x \to +\infty$ نتیجه می شود $x>0$ یعنی $\sqrt{x^2} = |x| = x$

و بنابراین داریم:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

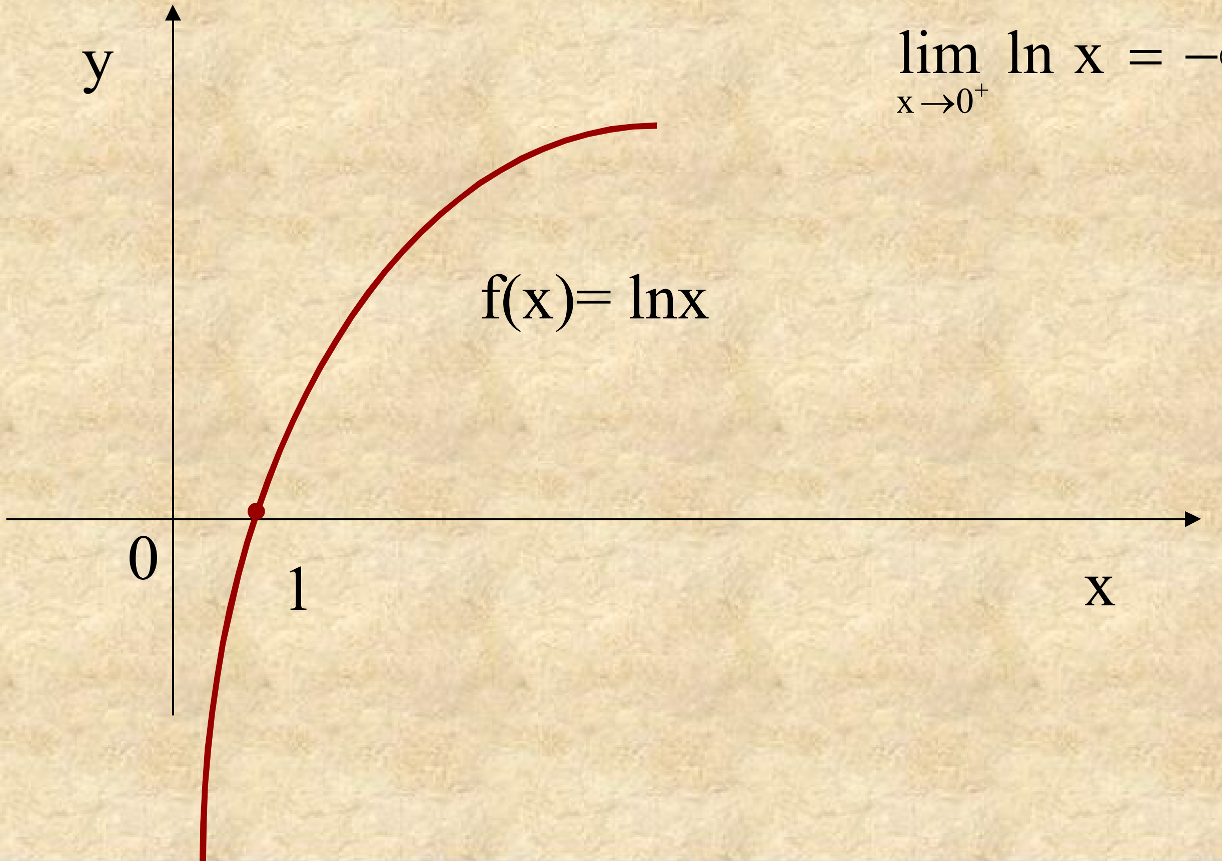
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}} = 2$$

۴-۵-۱۸ حد تابع لگاریتمی:

با توجه به نمودار تابع لگاریتم طبیعی $x>0$ ، $f(x)=\ln x$ حد های زیر را داریم :

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$



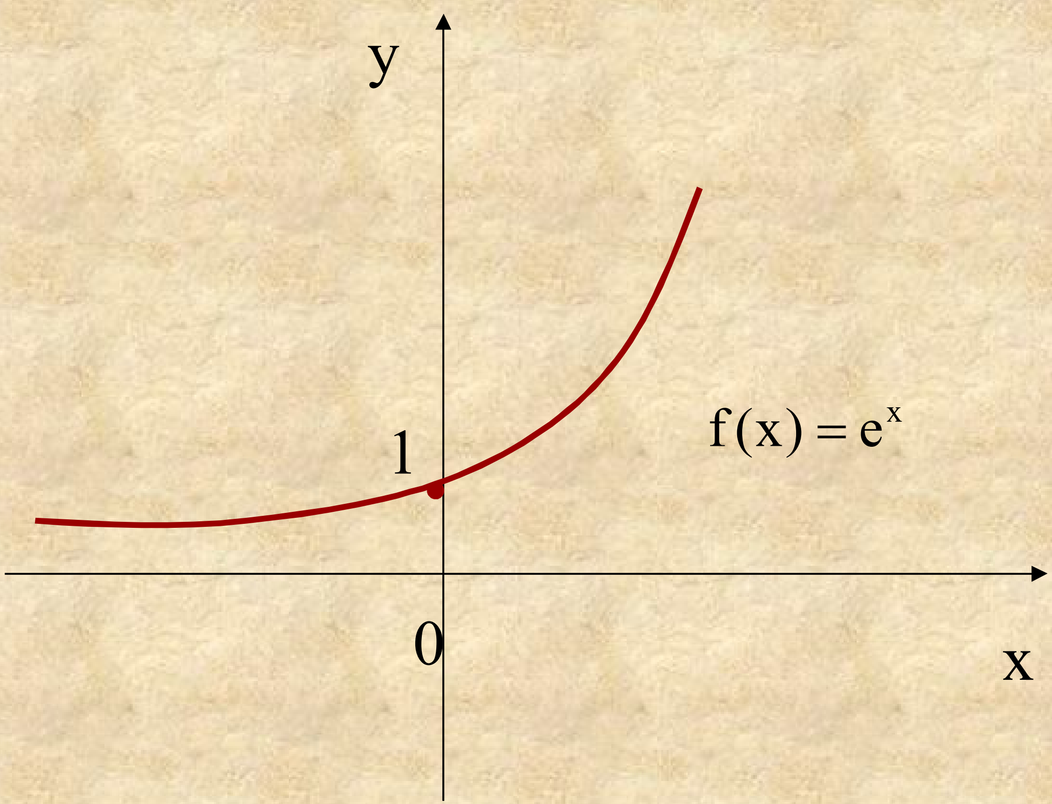
۴-۵-۱۹ حد تابع نمایی:

با توجه با نمودار تابع نمایی $f(x)=e^x$ حدهای زیر را داریم :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$



۶-۴ پیوستگی تابع

۴-۶-۱ مقدمه:

در این بخش به معرفی مفهوم **پیوستگی تابع** ، که شرط قویتری از حد

داشتن تابع است ، می پردازیم.

۴-۶- ۲ تعریف :

تابع f را در x=a **پیوسته** می نامیم در صورتی که سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) f در a تعریف شده باشد، یعنی f(a) وجود داشته باشد .

ب) f درa حد داشته باشد، یعنی $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد .

پ) حد تابع f در x=a برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

هرگاه یکی از شرایط بالا در x=a برقرار نباشند ، f را در **a**

ناپیوسته می نامیم. اگر f درa پیوسته نباشد ، f را **یک نقطه**

ناپیوستگی f می نامیم.

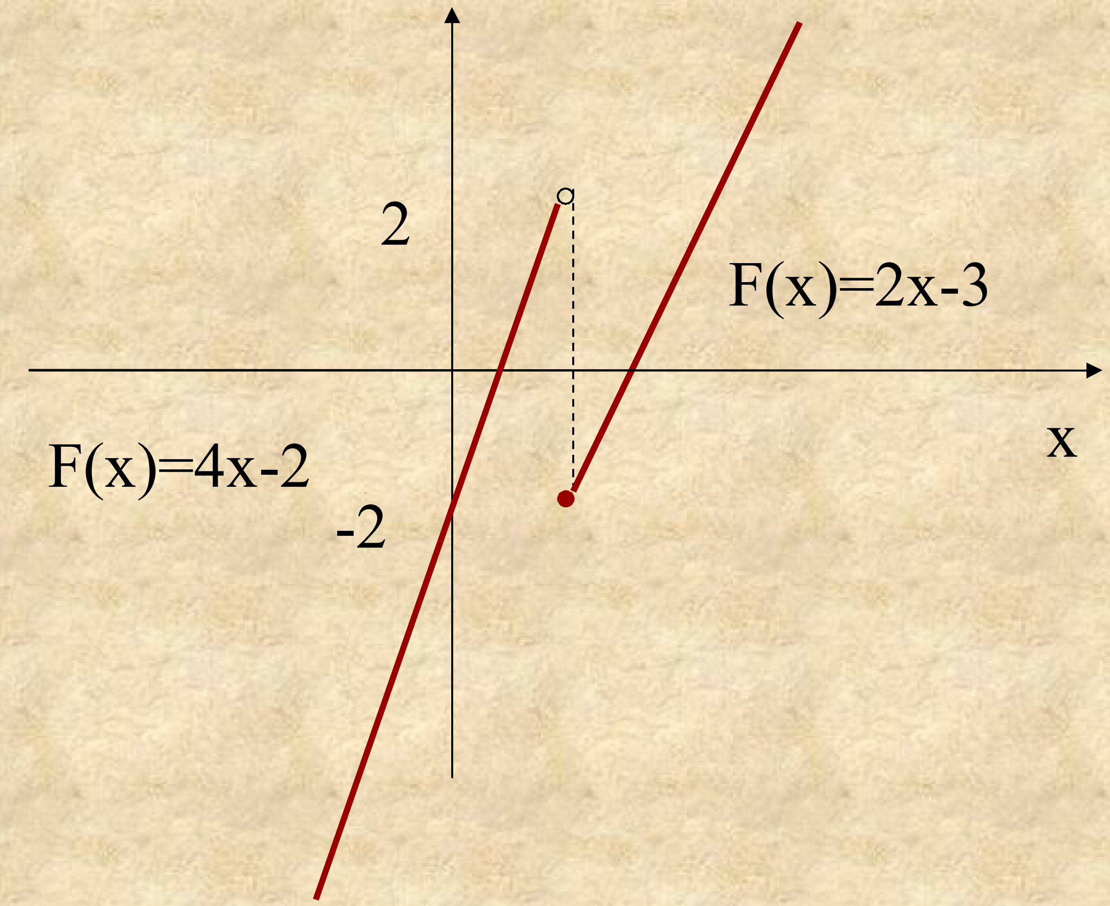
۴-۶-۴ مثال :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2x-3 & x\geq 1\\ 4x-2 & x<1\end{cases}$ در x=1 بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x-3) = -1$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (4x-2) = 2$$

چون حد چپ و حد راست تابع در x=1 برابر نیستند، حد تابع f در x=1 وجود ندارد. بنابراین شرط (ب) تعریف پیوستگی برقرار نیست.در نتیجه F در x=1 ناپیوسته است . نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است .


2
F(x)=2x-3
x
F(x)=4x-2
-2

۴-۶-۵ مثال :

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 3x+1 & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ بررسی کنید.

حل:

چون $f(0)=2$ پس شرط (الف) تعریف ۴-۶-۲ برقرار است ، از طرفی داریم :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x^2+1) = 1$$

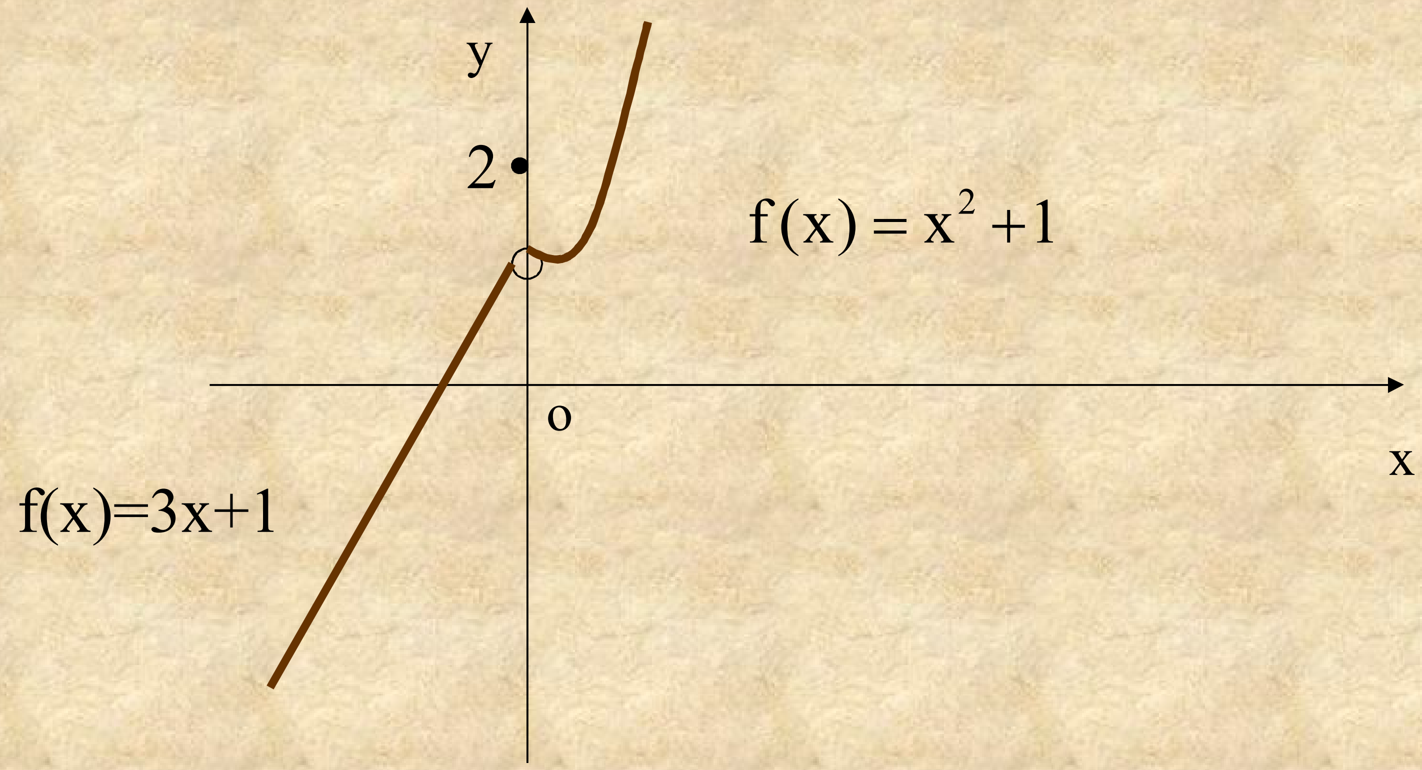
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (3x+1) = 1$$

پس $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ یعنی شرط (ب) ۴-۶-۲ نیز برقرار است، اما

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

پس شرط (پ) تعریف پیوستگی برقرار نیست . در نتیجه f در x=0

ناپیوسته است . نمودار این تابع در شکل زیر رسم شده است .



۴-۶-۸ تعریف :

الف) می گوییم تابع f در a پیوستگی راست دارد، هرگاه:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ب) می گوییم تابع f در a پیوستگی چپ دارد، هرگاه:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

۴-۶-۱۱ قضیه :

هرگاه توابع f و g در x=a پیوسته باشند ، آنگاه :

الف) تابع $f(x) \pm g(x)$ در x=a پیوسته است .

ب) تابع kf(x) در x=a پیوسته است .(k عددی ثابت است .)

پ) تابع f(x)g(x) در x=a پیوسته است .

ت) تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x=a پیوسته است .($g(a) \neq 0$

ث) تابع $|f(x)|$ در x=a پیوسته است .

۴-۶-۱۲ نکته:

در نتیجه ۴-۲-۷ (الف) دیدیم که هر تابع چند جمله ای درهرنقطه

حقیقی حد دارد واین حد برابر با مقدار چند جمله ای در آن نقطه

است . بنابراین هر تابع چند جمله ای

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

در هر نقطه حقیقی پیوسته است .

همچنین بنابر نتیجه ۴-۲-۷ (ب) ، هر تابع گویای $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

در همه دامنه اش پیوسته است ، زیرا به ازای هر $a \in R$ که $q(a) \neq 0$ داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

۴-۶-۱۳ مثال :

نشان بدهید که تابع $f(x)=\dfrac{5x^3-3x^2+4x+1}{x^2-9}$ در همه نقاط دامنه اش پیوسته است .

حل:

دامنه f مجموعه تمام اعداد حقیقی که به ازای آنها مخرج صفر نمی شود

چون به ازای $x=\pm 3$ مخرج کسر صفر می شود، دامنه f عبارت است از:

$$D_f=\{x \mid x^2-9\neq 0\}=R-\{3,-3\}$$

فرض می کنیم $a\in D_f$ داریم :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{5x - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 - 9}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \left(5x^3 - 3x^2 + 4x + 1\right)}{\lim\limits_{x \to a} \left(x^2 - 9\right)}$$

$$= \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a + 1}{a^2 - 9}$$

$$= f(a)$$

در نتیجه f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته است .

۴-۶-۴ قضیه :

اگر تابع f در x=b پیوسته باشد و $\lim_{x \to a} g(x) = b$ آنگاه :

$$\lim_{x \to a}(fog)(x) = f(b)$$

به بیان دیگر:

$$\lim_{x \to a}(fog)(x) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

۴-۶-۲۰ تعریف :

تابع f را بر **بازه باز (a , b) پیوسته** می نامیم هر گاه f در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد. در صورتی که f دست کم در یک نقطه از بازه (a , b) پیوسته نباشد ، f را در بازه (a ,b) ناپیوسته می نامیم .

۴-۶-۲۱ مثال:

تابع $f(x)=\frac{5x^3-1}{(x-1)(x+3)}$ را در نظر می گیریم .این تابع در هر نقطه حقیقی به استثنای ۱و۳- پیوسته است و در نتیجه ، بنابر تعریف ۴-۶-۲۰، در هر بازه بازی که شامل ۱و ۳- نباشد ، پیوسته خواهد بود.

۴-۶-۲۲ تعریف :

تابع fرا در **بازه بسته[a , b]** **پیوسته** می نامیم هر گاه شرایط زیر برقرار باشند:

الف) f را در بازه باز (a , b) پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد ، یعنی $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

پ) f در b پیوستگی چپ داشته باشد ، یعنی $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$

در صورتی که دست کم یکی از شرایط بالا برقرار نباشد، f را در

بازه بسته [a , b] ناپیوسته می نامیم.

۴-۶-۲۳ مثال :

پیوستگی تابع f با ضابطه تعریف زیر را در بازه بسته [2 , 2-] بررسی کنید .

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & -2\le x<1\\ x+4 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

حل:

چون $f(1)=1+4=5$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+4)=5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+2)=5$$

پس $\lim_{x\to 1} f(x)=5=f(1)$ در $x=1$، یعنی f در $x=1$ پیوسته است .

بنابراین f در بازه (2 , 2-) پیوسته است .از طرفی داریم :

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (3x+2) = -4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+4) = 6$$

در نتیجه بنابر ۴-۶-۲۲، f در بازه [-2 , 2] پیوسته است .

فصل پنجم

مشتق

هدفهای کلی :

هدف کلی فصل این است که با مفهوم بنیادی مشتق تابع ، قضیه های مشتق گیری، مشتق توابع جبری و غیر جبری ، مشتــق گیری از توابع ضمنی ، و با مفهوم دیفرانسیل آشنا شوید.

هدفهای رفتاری

از شما انتظار می رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱) مفهوم مشتق را توضیح بدهید.

۲) قضیـــــه های مشتق را بیان کنید و آنها را در حل مسائل به کار ببرید.

۳) مشتق های چپ و راست تابع را در یک نقطه تعریف کنید.و برای توابع داده شده ، وجود مشتق های یک طــــــرفه را که در نقاط خواسته شده تحقیق کنید.

۴) رابطه بین مشتقهای یک طرفه و مشتق تابع در یک نقطه را بیان کنید و آن را در حل مسائل به کار ببرید.

۵) قاعده زنجیری در مشتق گیری را توضیح بدهید و مشتق توابع مرکب را به کمک این قاعده محاسبه کنید .

۶) روش مشتق گیری از توابع ضمنی را بیان کنید و مشتق توابعی را که به صورت غیر صریح بیان شده اند محاسبه کنید .

۷) مشتق توابع مثلثاتی و توابع وارون مثلثاتی داده شده را به دست آورید

۸) رابطه بین مشتق تابع و مشتق وارون تابع را بیان کنید و به کمک این رابطه ، مشتق تابع داده شده را با استفاده از مشتق وار.ن آن ، و بر عکس ، تعیین کنید .

۹) مشتق توابع نمایی و لگاریتمی داده شده را محاسبه کنید .

۱۰) روش مشتق گیری لگاریتمی را توضیح بدهید و مشتق توابع داده شده را با استفاده از این روش محاسبه کنید.

۱۱) روش محاسبه مشتق توابعی به صورت $u(x)^{v(x)}$ را توضیح بدهید و از آن در حل مسائل استفاده کنید .

۱۲) مفهوم دیفرانسیل تابع و دیفرانسیل متغییر را توضیح بدهید و برای تابع داده شده ، مقدار دیفرانسیل تابع را محاسبه کنید .

۱۳) روش محاسبه مشتق های مرتبه های بالاتر از یک را بیان کنید و در حل مسائل به کار ببرید.

۱۴) با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ، مقدار تقریبی اعداد رادیکالی را محاسبه کنید.

۱۵) با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ، خطای مطلق ، خطای نسبی و درصد خطای محاسبه را تعیین کنید.

۱۶) دیفرانسیل کل تابع n متغیره را تعریف کنید و آن را برای توابع داده شده ، محاسبه کنید .

۱۷) روش محاسبه مشتق توابعی را به صورت پارامتری بیان می شوند توضیح بدهید و آن را در محاسبه مشتق توابع داده شده بکار ببرید.

مقدمه

در فصل چهارم با مفهوم حد آشنا شدیم .در این فصل با استفاده از این مفهوم اساسی ،به معرفی مفهوم مهم مشتق می پردازیم . مشتق یک ابزار ریاضی برای اندازه گیریتغییرات متغیرها نسبت به هم است . با مطالعه مشتق می توانیم آهنگ تغییراتی راکه در مسائل مختلف پیش می آید تعیین کنِیم .علاوه براین ،به کمک مشتق می توانیم ماکسیمم ومینیمم توابع را نیز بررسی کنیم .

۱ـ۵ مفهوم مشتق

۵-۱-۱ مثال:

وزن کودک با گذشت زمان تغییر می کند ، پس می توانیم آن را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیریم . اگر این تابع را $w(t)$ بنامیم ،آنگاه تغییر وزن کودک در بازهٔ زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با

$$w(t_2) - w(t_1)$$

آهنگ متوسط تغییر وزن کودک در این بازهٔ زمانی ، از تقسیم تغییر وزن او بر طول این بازهٔ به دست می آید . بنا براین

$$\frac{w(t_2) - w(t_1)}{t_2 - t_1}$$ آهنگ متوسط تغییر $w(t)$ در بازهٔ زمانی

۵-۱-۲ تعریف :

فرض کنیم تابع f در بازهٔ [a,b] تعریف شده باشد . برای هردوعدد x_0 و x_1 در بازه (a,b) که $a < x_0 < x_1 < b$ ، تغییر مقدار f(x) هنگامی که x از x_0 تا x_1 تغییر کند برابر $f(x_1) - f(x_0)$ است و آهنگ تغییر f در بازه $[x_0, x_1]$ برابر $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ است .

۵-۱-۳ مثال :

فرض کنید f(r) مساحت دایره ای به شعاع r باشد ، پس

$$f(r) = \pi r^2$$

آهنگ متوسط تغییر مساحت این دایره ، هنگامی که شعاع آن از r_1 به r_2 تغییر کند برابر است با

$$\frac{f(r_2)-f(r_1)}{r_2-r_1}=\frac{\pi r_2^2-\pi r_1^2}{r_2-r_1}$$
$$=\pi(r_2+r_1)$$

بنابراین ، اگر شعاع دایره از $r_1=2$ به $r_2=4$ تغییر کند ، اهنگ متوسط تغییر مساحت آن برابر است با

$$\pi(4+2)=6\pi$$

اکنون با استفاده از آهنگ متوسط تغییر یک تابع به تعریف مشتق تابع در یک نقطه می پردازیم .

۵-۱-۴ تعریف :

تابع $y=f(x)$ ونقطه a در دامنه f را در نظر می گیریم . اگر

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

وجود داشته باشد ، آن را **مشتق تابع f در نقطه a** می نامیم و با $f'(x)$ نشان می دهیم .

اگر تابع f در نقطه a مشتق داشته باشد ، f را در $x=a$ **مشتق پذیر** می گوییم .

اگر تابع f در همه نقاط دامنه اش مشتق داشته باشد ، f را **مشتق پذیر** می نامیم .

۵-۱-۵ مثال :

مشتق تابع $f(x)=3x^2-4x$ را در نقطه $x=2$ بااستفاده از تعریف به دست آورید .

حل:

داریم :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x^2-4x)-(12-8)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(3x+2)=8$$

۵-۱-۷ نکته :

در تعریف ۵-۱-۴دیدیم که مشتق تابع f در نقطه x=a برابر است با

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۱)$$

اگر قرار بدهیم h=x-a ، به دست آوریم x=a+h ، پس f(x)=f(a+h) . از طرفی

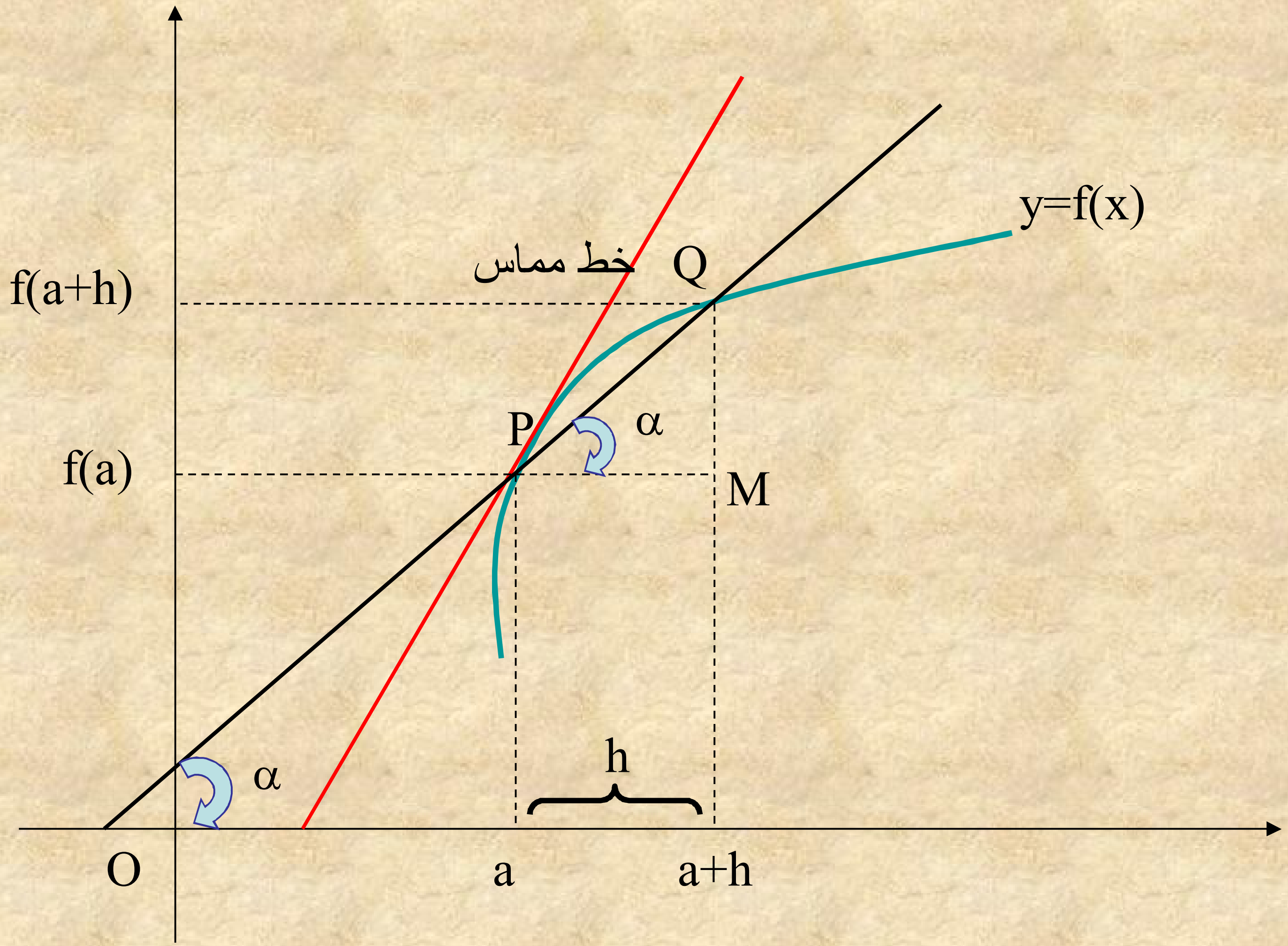
$x\to a$ اگر وتنها اگر $h\to 0$، در نتیجه (۱) را می توان به صورت

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (۲)$$

نوشت . بنابراین ، مشتق تابع f در نقطه a را می توان از رابطه (۲) نیز به دست آورد .

۵-۱-۸ تعبیر هندسی مشتق :

مفهوم مشتق یک تابع در یک نقطه را می توان به شیب خط مماس در آن نقطه تعبیر کرد .برای روشن شدن مطلب ، تابع $y=f(x)$ و دو نقطه $P(a , f(a))$ و $Q(a+h , f(a+h))$ را روی نمودار f در نظر می گیریم . به شکل زیرتوجه کنید.


y=f(x)
خط مماس
Q
f(a+h)
P
α
f(a)
M
h
α
O
a
a+h

۵-۱-۹ نتیجه :

۱) شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه x=a که آن را با m(a) نشان می دهیم

برابر است با مشتق تابع f در نقطه x=a ، به عبارت دیگر

$$m(a) = f'(a)$$

۲) خط عمود بر نمودار f در نقطه x=a خطی است که بر خط مماس بر نمودار

در این نقطه عمود است . پس اگر $m'(a)$ شیب خط عمود بر نمودار در این نقطه

باشد ، داریم

$$m'(a) = -\frac{1}{m(a)}$$

۵-۱-۱۱ تعریف:

بنابر ۵-۱-۷ ، مشتق تابع f در نقطه x برابر است با

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

در این رابطه ، h را ، که ممکن است مثبت یا منفی باشد ، نموّ متغیر می نامیم

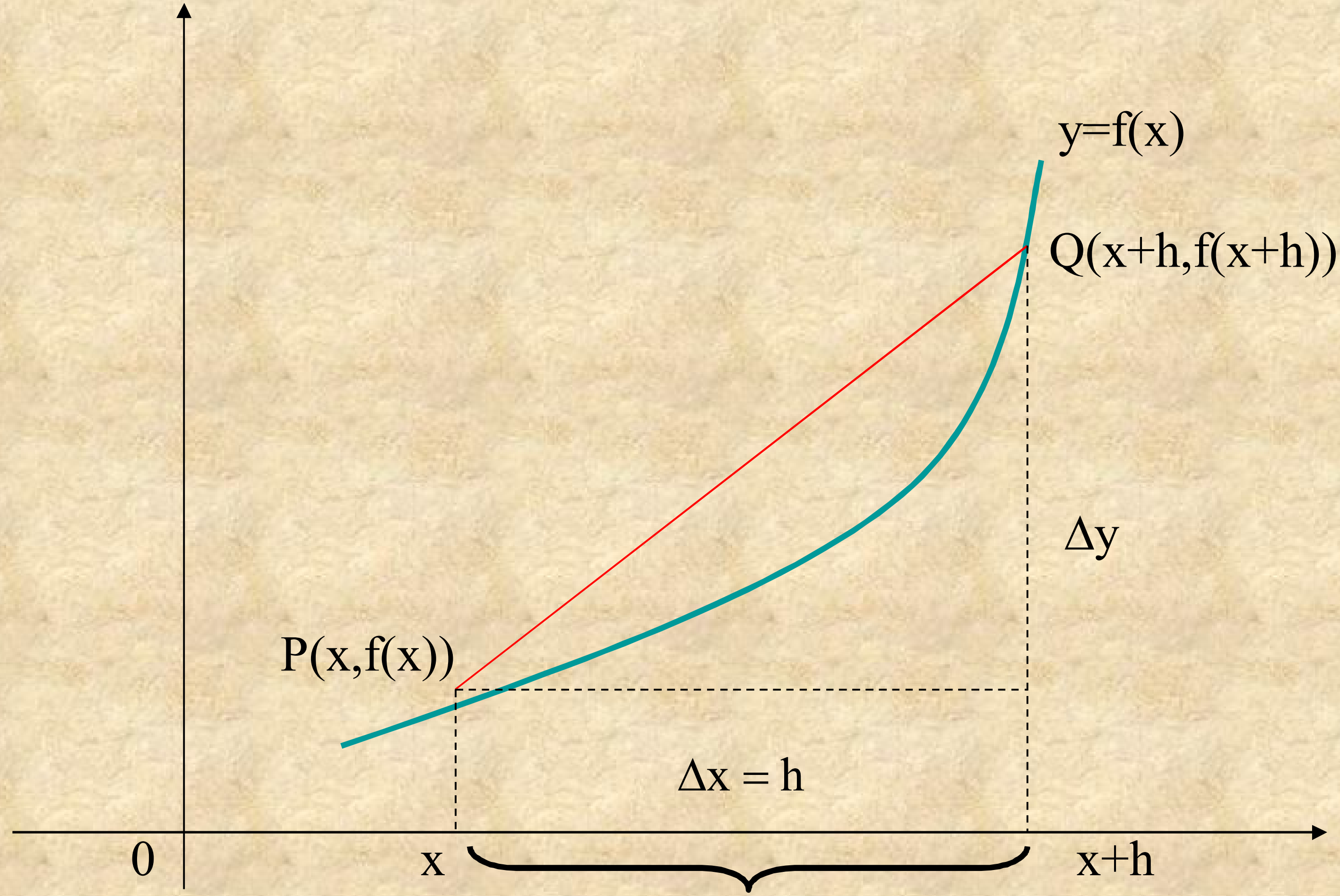
و آن را با نماد Δx نشان می دهیم.تفاضل f(x+h)-f(x) را نمو تابع f به ازای h

می نامیم و با Δy یا Δf نشان می دهیم . بنابراین می نویسیم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

۵-۱-۱۲ نماد گذاری :

مشتق تابع y= f(x) در نقطه x را با نمادهای دیگری نیز نشان می دهند ،مانند

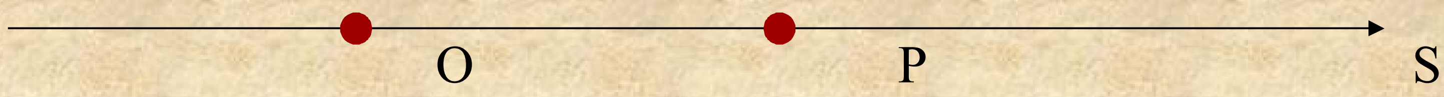


$$y' \quad , \quad \frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{df}{dx} \quad , \quad D_x^y$$

✵ توجه کنید که نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ کسر نیستند . این نمادها و نماد D_x^y به معنای مشتق تابع $y=f(x)$ نسبت به متغیر x اند .

۵-۱-۱۳ تعریف :

فرض می کنیم معادله حرکت جسم P در روی محور OS ، به صورت $S=S(t)$ بیان شده است .



سرعت متحرک p لحظه $t=a$ برابر است با

$$V(a)=S'(a)=\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}$$

۵-۱-۱۴ مثال :

فرض کنید $S(t)=t^3+2t^2$ معادله حرکت جسمی روی خط مستقیمی باشد .سرعت

این متحرک را در لحظه $t=1$ به دست آورید .

$$V(1)=S'(1)=\lim_{t\to 1}\frac{(t^3+2t^2)-3}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2+3t+3)(t-1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\ (t^2+3t+3)$$

$$=7$$

قضیه زیر رابطه مشتق پذیری تابع و پیوستگی آن را در یک نقطه بیان می کند .

۵-۱-۱۵ قضیه :

اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه در این نقطه پیوسته است .

۵-۱-۱۷ نکته :

توجه کنید که عکس قضیه ۵-۱-۱۵ درست نیست . یعنی ممکن است تابعی

در نقطه ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد . برای مثال

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید . $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ نتیجه می شود که تابع f در $x=0$

پیوسته است ، اما این تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست ، زیرا داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

اکنون به تعریف مشتقهای یک طرفه یعنی ، مشتقهای چپ و راست تابع دریک نقطه ، می پردازیم .

۵-۱-۱۸ تعریف :

فرض می کنیم $y=f(x)$ و a متعلق به دامنه تابع f باشد . **مشتقهای راست وچپ**

تابع f در $a=$ x را به ترتیب با نمادهای $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشروط بر اینکه این حدها وجود داشته باشند . مشتقهای چپ وراســت را

مشتقهای یک طرفه می نامیم .

۵-۱-۱۹ قضیه :

$f'(a)$ موجود است اگر وتنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود ومساوی باشند .

۵-۱-۲۰ مثال :

نشان بدهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ 2x^2+2 & x < 1 \end{cases}$$

در $x=1$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست .

حل :

داریم

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x+1) = 4$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2+2) = 4$$

از $\lim_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1)$ نتیجه می شود که f در $x=1$ پیوسته است. اکنون

مشتقهای راست و چپ f در $x=1$ را محاسبه می کنیم .

$$f'_{+}(1)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{3(1+h)+1-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{3h}{3}=\lim_{h\to 0^{+}}3=3$$

$$f'_{-}(1)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{2(1+h)^{2}+2-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{2h^{2}+4h}{1}=\lim_{h\to 0^{-}}(2h+4)=4$$

مشتقهای راست و چپ f در $x=1$ برابر نیستند ، پس بنابر قضیه ۵-۱-۱۹ تابع f

در $x=1$ مشتق پذیر نیست .

۵-۱-۲۲ تعریف :

تابع f را در بازهٔ بسته [a,b] مشتق پذیر می نامیم اگر

۱) f در بازهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد .

۲) مشتقهای یک طرفه $f'_{+}(a)$ و $f'_{-}(b)$ وجود داشته باشند .

۲-۵ قضیه های مشتق

5-۲-۱ قضیه :

مشتق تابع ثابت $f(x)=c$ که درآن c عدد حقیقی ثابتی است ، برابر صفراست ، یعنی

$$f'(x)=0$$

۵-۲-۲ قضیه :

تابع خطی $f(x)=ax+b$ درهر عدد حقیقی مشتق پذیر است و داریم

$$f'(x)=a$$

۵-۲-۴ قضیه :

تابع $f(x)=x^r$ که درآن r عددی حقیقی است ،روی دامنه تابع f مشتق پذیر است وداریم

$$f'(x)=rx^{r-1}$$

۵-۲-۵ مثال:

فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ ، $f'(x)$ را به دست آورید .

حل :

چون $f(x)=\sqrt{2}$ ، قضیه ۵-۲-۴ را به ازای $r=\frac{1}{2}$ به کار می‌بریم برای هر $x>0$ داریم

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۵-۲-۷ قضیه :

اگر توابع f(x) و g(x) مشتق پذیر باشند آنگاه

الف) مجموع f(x)+g(x) مشتق پذیر است وداریم

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

ب) تفاضل f(x)-g(x) مشتق پذیر است وداریم

$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$

پ) برای هر عدد حقیقی k، تابع kf(k) مشتق پذیر است و داریم

$$[kf(x)]' = kf'(x)$$

ت) حاصل ضرب $f(x)g(x)$ مشتق پذیر است و داریم

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ث) خارج قسمت $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، $(g(x) \neq 0)$ مشتق پذیر است و داریم

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ج) برای هر عدد طبیعی n ، تابع $f^n(x)$ مشتق پذیر است وداریم

$$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

۵-۲-۸ قضیه تابع چند جمله ای

$$p(x) = a_0x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

در تمام اعداد حقیقی مشتق پذیر است و داریم

$$p'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots a_{n-1}$$

۵-۲-۱۱ قضیه (قاعدهٔ زنجیری) :

اگر توابع $y=f(u)$ و $u=g(x)$ مشتق پذیر باشند ، آنگاه تابع مرکب

$$y=(fog)(x)=f(g(x))=f(u)$$

مشتق پذیر است و داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(fog)(x)=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

در رابطه بالا ، $\frac{df}{du}$ به معنای مشتق تابع f نسبت به متغیر u و $\frac{du}{dx}$ به معنای مشتق u نسبت به x است .این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

۵-۲-۱۲ مثال :

فرض کنید $f(u) = 2u^4 - 3u^2 + 7$ و $u = 2x^3 - x + 5$ مشتق تابع f را نسبت به x به دست آورید .

حل :

بنابر قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

از طرفی

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{du}(2u^4 - 3u^2 + 7) = 8u^3 - 6u$$

$$= 8(2x^3 - x + 5)^3 - 6(2x^3 - x + 5)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 - x + 5) = 6x^2 - 1$$

در نتیجه به دست می آوریم

$$\frac{df}{dx}=\left[8(2x^3-x+5)^3-6(2x^3-x+5)\right](6x^2-1)$$

۵-۲-۱۳ مثال :

با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتق تابع $f(x)=(\frac{x^2+1}{x^3+1})^5$ را به دست آورید

حل :

قرار می دهیم $u=\frac{x^2+1}{x^3+1}$ و $f(u)=u^5$. بنابر قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df(u)}{du}=\frac{df(u^5)}{du}=5u^4=5\left(\frac{x^2+1}{x^3+1}\right)^4$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x(x^3+1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)}=\frac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$$

در نتیجه به دست می آوریم

$$\frac{df(x)}{dx}=5\left(\frac{x^2+1}{x^3+1}\right)^4\left(\frac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}\right)$$

$$=\frac{5(x^2+1)^4(-x^4-3x^2+2x)}{(x^3+1)^6}$$

۵-۲-۱۵ نتیجه :

بنابر قضیه ۵-۲-۴ وقاعدهٔ زنجیری و با فرض u=f(x) و $y=u^r$ برای هر عدد گویای r خواهیم داشت

$$[f^r(x)]' = rf^{r-1}(x)\cdot f'(x)$$

۵-۲-۱۷ مشتق گیری ضمنی :

اگر $y=4x^3-3x^2+5$، آنگاه معادله تابع $f=\{(x,y)\mid y=4x^3-3x^2+5\}$ را به طور صریح تعریف می کند . ولی همه توابع به طور صریح به صورت y=f(x) بیان نمی شوند .مثلاً معادله

$$F(x,y)=x^7-3x^4y^6+5y^3x-4e^{2x}y=0 \qquad (۱)$$

را نمی توان بر حسب y یا بر حسب x حل کرد .

(۲) $F(x,y)=0$

به طور ضمنی تعریف شده است اگر بخواهیم مشتق yنسبت به x را بیابیم ، از دستور

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

استفاده می کنیم که در آن F_x مشتق تابع F نسبت به x با فرض ثابت بودن y ، F_y مشتق تابع F نسبت به y با فرض ثابت بودن x است ؛ این روش محاسبه مشتق را مشتق گیری ضمنی می نامیم . به مثال زیر توجه کنید

۵-۲-۱۸ مثال :

تابع y=f(x) به طور ضمنی توسط معادله $F(x, y) = 2x^3 + xy^2 + y^4 - 3 = 0$

شده است، $f'(x)$، را محاسبه کنید .

حل :

F_x مشتق F نسبت به x با فرض ثابت بودن y برابر است با

$$F_X = 6x^2 + y^2 + 0 + 0 = 6x^2 + y^2$$

F_y، مشتق F نسبت به y با فرض ثابت بودن x برابر است با

$$F_y = 0 + 2xy + 4y^3 + 0 = 2xy + 4y^3$$

بنابراین ، طبق ۵-۲-۱۷ داریم

$$f'(x) = -\frac{6x^2 + y^2}{2xy + 4y^3}$$

مشتق این تابع را می توان به روش دیگری نیز محاسبه کرد . در این روش از دو

طرف تساوی

$$2x^3 + xy^2 + y^4 - 3 = 0$$

نسبت به x مشتق می گیریم ، و البته باید توجه کنیم که مشتق y نسبت به x برابر y' است . نتیجه می شود

$$6x^2 + y^2 + 2xyy' + 4y^3 y' = 0$$

معادله اخیر را نسبت به حل می کنیم . به دست می آوریم

$$y' = -\frac{6x^2 + y^2}{2xy + 4y^3}$$

مشاهده می کنیم که نتیجه حاصل از دو روش یکسان است .

۵-۳ مشتق توابع مثلثاتی

۵-۳-۱ مشتق تابع سینوس :

فرض می کنیم $f(x)=\sin x$ ، در این صورت مشتق تابع $\sin x$ برابر $\cos x$ است، یعنی

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

۵-۳-۲ تعمیم :

فرض می کنیم $u=g(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد و $f(u)=\sin u$. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و ۵-۳-۱ به دست می آوریم

$$\frac{df(g(x))}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\sin u)}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$$

۵-۳-۳ مثال :

فرض کنید $f(x) = \sin(5x^3 + 2x - 1)$ مشتق f را نسبت به x محاسبه کنید .

حل:

قرار می دهیم $u = 5x^3 + 2x - 1$. بنابر ۵-۳-۲ داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{d}{dx}(5x^3 + 2x - 1)$$

$$= \cos(5x^3 + 2x - 1) \cdot (15x^2 + 2)$$

۵-۳-۴ مشتق تابع کسینوس :

فرض می کنیم $f(x)=\cos x$.

در این صورت

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

۵-۳-۵ تعمیم :

اگر $u=g(x)$ تابع مشتق پذیری از x و $f(u)=\cos u$ باشد با استفاده از قاعدهٔ زنجیری

و ۵-۳-۴ نتیجه می گیریم

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۳-۶ مشتق تابع تانژانت:

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ، می توان مشتق تابع تانژانت را به دست آورد .

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

۵-۳-۷ تعمیم :

اگر $u=g(x)$ تابع مشتق پذیری از x و $f(u)=\tan u$ باشد ،آنگاه با استفاده از ۵-۳-۶ و قاعدهٔ زنجیری به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = (1+\tan^2 u)\frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۵ مشتق توابع لگاریتمی و نمایی

۵-۵-۱ قضیه :

الف) مشتق تابع $f(x)=\ln x$ که $x>0$ ،برابر است با

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

ب) اگر $u(x)>0$ تابع مشتق پذیری از x باشد آنگاه

$$\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

۵-۵-۲ مشتق تابع نمایی

هرگاه $y = e^x$ آنگاه $y' = e^x$

❋به عبارت دیگر مشتق تابع e^x برابربا خودش است.

۵-۵-۴ نتیجه :

اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد ،آنگاه بنابر۵-۵-۲ و قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{d}{dx} e^{u(x)} \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

۵-۵-۵ مثال :

الف) اگر $y = \ln(3x^2 + 4x)$، آنگاه بنابر ۵-۵-۱ (ب) داریم

$$y' = \frac{1}{3x^2 + 4x}(6x + 4)$$

ب) اگر $y = \ln(1 + \sin^2 x)$، آنگاه

$$y' = \frac{1}{1 + \sin^{2x}}(2\sin x \cdot \cos x)$$

$$= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$$

پ) اگر $y = e^{3 + \tan x}$، آنگاه

$$y' = e^{3 + \tan x} \frac{d}{dx}(3 + \tan x)$$

$$= e^{3 + \tan x}(1 + \tan^2 x)$$

۵-۵-۷ مشتق: تابع a^x

فرض می کنیم $y = a^x$ که $a>0$, $a \neq 1$ برای محاسبه مشتق a^x از روش مشتق گیری لگاریتمی استفاده می کنیم . به این منظور از دو طرف $y = a^x$ لگاریتم طبیعی می گیریم :

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

سپس از دو طرف رابطه اخیر نسبت به x مشتق می گیریم . توجه کنید که lna مقداری ثابت است . به دست می آوریم

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

یا

$$y' = y \ln a = a^x \cdot \ln a$$

در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

۵-۵-۸ نتیجه :

از ۵-۵-۷ و قاعدهٔ زنجیری نتیجه می شود که اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری از x باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}a^{u(x)} = a^{u(x)}\ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

۵-۵-۹ مثال :

الف) مشتق تابع $y = 2^{3x^2+5x}$ بنابر ۵-۵-۸ برابر است با

$$y' = 2^{3x^2+5x} \cdot \ln 2 \frac{d}{dx}(3x^2+5x)$$

$$= 2^{3x^2+5x} \cdot \ln 2(6x+5)$$

ب) مشتق تابع $y = 3^{\cos x + \sin x}$ بنابر ۵-۵-۸ برابر است با

$$y' = 3^{\cos x + \sin x} \ln 3 \frac{d}{dx}(\cos x + \sin x)$$

$$= 3^{\cos x + \sin x} \ln 3(-\sin x + \cos x)$$

۵-۵-۱۰ مشتق تابع $\log_a^{v(x)}$

در دستور ۵-۵-۸ اگر $\log_a^{v(x)}$ اختیار شود که در آن $v(x)$ تابع مشتق پذیری از x است ، به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx} a^{\log_a^{v(x)}} \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\log_a^{v(x)})$$

از طرفی با توجه به $a^{\log_a^{\nu(x)}} = \nu(x)$ رابطه بالا به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{d}{dx}\nu(x) = \nu(x)\cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}(\log_a^{\nu(x)})$$

که از آن به دست می آوریم

$$\frac{d}{dx}(\log_a^{\nu(x)}) = \frac{1}{\nu(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d\nu(x)}{dx}$$

این رابطه را می توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم

$$\frac{d}{dx}(\log_a^{\nu(x)}) = \frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

۵-۵-۱۱ مثال :

الف) مشتق تابع $y=\log_2(x^3+5x^2+4)$ بنابر ۵-۵-۱۰ برابر است با

$$y'=\frac{(x^3+5x^2+4)'}{x^3+5x^2+4}\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{3x^2+10x}{x^3+5x^2+4}\cdot\frac{1}{\ln 2}$$

ب) مشتق تابع $y=\log_3(2+3\cos^2 x)$ بنابر ۵-۵-۱۰ برابر است با

$$y'=\frac{(2+3\cos^2 x)'}{2+3\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\ln 3}=\frac{-6\sin x\cdot\cos x}{2+3\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\ln 3}$$

۵-۵-۱۳ مثال :

مشتق $y=(4+x^2)^{5x^3+2x}$ را محاسبه کنید .

حل :

از دو طرف معادله ، لگاریتم طبیعی می گیریم

$$\ln y=(5x^3+2x)\cdot\ln(4+x^2)$$

از دو طرف رابطه اخیر نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{y'}{y}=(15x^2+2)\ln(4+x^2)+\frac{2x}{4+x^2}(5x^3+2x)$$

در نتیجه ، مشتق تابع عبارت است از

$$y'=(4+x^2)^{5x^3+2x}\left[(15x^2+2)\ln(4+x^2)+\frac{2x}{4+x^2}(5x^3+2x)\right]$$

۵-۶ مشتق مرتبه های بالاتر

۵-۶-۱ تعریف :

فرض می کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر باشد . $f'(a)$ را مشتق اول تابع f در نقطه a می نامیم . فرض می کنیم $A=\{x \mid f'(x)$ وجود دارد $\}$ در این صورت f' تابعی روی A است و می توانیم درمورد مشتق f' در نقطه $a\in A$ صحبت کنیم . مشتق f' در نقطه a را مشتق دوم f در نقطه a می نامیم وبا $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نشان می دهیم .به همین ترتیب مشتقهای مرتبه های بالاتر در نقطه a را درصورتی که وجود داشته باشند با $f^{(3)}(a)$ ، $f^{(4)}(a)$ ، ... و $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم و آنها را به ترتیب مشتق های مرتبه سوم ، چهارم ، ... و n ام تابع در نقطه a می گوییم .

بنابراین برای هر عدد طبیعی n، اگر مشتق اول تابع $f^{(n-1)}(x)$ وجود داشته باشد آن رامشتق n ام تابع f می نامیم و با نماد $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم .

۵-۶-۲ نماد گذاری :

الف) گاهی f' را با $f^{(1)}$ و f را با $f^{(0)}$ نشان می دهند .

ب) همان طور که f' را با نماد $\frac{df}{dx}$ نشان می دادیم ، f'' را که برابر $\frac{d}{dx}(\frac{df}{dx})$ است با $\frac{d^2f}{dx^2}$ نشان می دهیم . به همین ترتیب $f^{(n)}$ را با نماد $\frac{d^nf}{dx^n}$ زیر می توان نشان داد .

پ) همچنان که f' را با D_xf نشان می دادیم ، $f^{(2)}$، $f^{(3)}$، ...، و $f^{(n)}$ را می توان به ترتیب با نمادهای D_x^2f، D_x^3f، ...، و D_x^nf نشان داد .

۵-۶-۳ مثال :

مشتق های اول تا سوم تابع $f(x)=e^{5x^2+3}+\sin(2x+1)$ را محاسبه کنید .

حل :

$$f'(x)=10xe^{5x^2+3}+2\cos(2x+1)$$

$$f''(x)=(f'(x))'=10e^{5x^2+3}+10x(10x)e^{5x^2+3}-2(2)\sin(2x+1)$$

$$=100e^{5x^2+3}+100x^2e^{5x^2+3}-4\sin(2x+1)$$

$$f^{(3)}(x)=(f''(x))'$$

$$=10(10x)e^{5x^2+3}+100(2x)e^{5x^2+3}+100x^2(10x)e^{5x^2+3}-4(2)\cos(2x+1)$$

$$=10xe^{5x^2+3}(3+10x^2)-8\cos(2x+1)$$

۷-۵ دیفرانسیل

۵-۷-۱ مقدمه :

فرض می کنیم y=f(x) تابعی مشتق پذیر باشد بنابر تعریف مشتق داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بنابر تعریف حد به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که

$$0 < |\Delta x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

یا

$$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right| < \varepsilon$$

پس $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است . به عبارت دیگر اگر $|\Delta x|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد ، $f'(x)\Delta x$ تقریب مناسبی برای Δy است ، یعنی می توانیم بنویسیم

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

یا

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

بنابراین

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

۵-۷-۲ تعریف :

هرگاه تابع $y=f(x)$ مشتق پذیر باشد ، دیفرانسیل y راباdy نشان می دهیم وبارابطه زیر تعریف می کنیم

$$dy = f'(x)\Delta x$$

۵-۷-۳ دیفرانسیل متغیر :

اگر $f(x)=x$ باشد ، آنگاه خواهیم داشت $f'(x)=1$ و رابطه ۵-۷-۲ به صورت سادهٔ $dx = \Delta x$ در می آید . یعنی اگر x متغیر مستقل باشد دیفرانسیل x با نمو x برابـر خواهد بود . در نتیجه تعریف ۵-۷-۲ به صورت زیر بیان می شود :

$$dy = f'(x)dx$$

بنابراین ،دیفرانسیل هرتابع مشتق پذیر برابربا حاصل ضرب مشتق آن دردیفرانسیل متغیر مستقل است .

۵-۷-۴ مثال :

دیفرانسیل تابع $y=\ln(3x+4)$ برابر است با

$$dy = y'dx = \frac{3}{3x+4}dx$$

۵-۷-۵ مثال :

Δy و dy را برای تابع $y = f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ در نقطه $x=0$ با فرض $\Delta x = dx = 0/1$ محاسبه کنید .

حل :

داریم

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= [3(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x)^{-7}] - [3x^2 + 4x - 7]$$

$$= 3(\Delta x)^2 + 6x\Delta x + 4\Delta x$$

به ازای هر $x=0$ و $\Delta x=0$ به دست می آوریم

$$\Delta y = 3(0/1)^2 + 0 + 4(0/1) = 0/43$$

همچنین داریم

$$dy = f'(x)dx = (6x+4)dx$$

به ازای $x=0$ و $dx=0/1$ به دست می آوریم

$$\Delta y = (6(0)+4)(0/1) = 0/4$$

معمولاً برای محاسبات تقریبی از مفهوم دیفرانسیل استفاده می شود. به مثالهای زیر توجه کنید .

۵-۷-۶ مثال :

با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[4]{18}$ را محاسبه کنید .

حل :

تابع $f(x)=\sqrt[4]{x}$ را در نظر می گیریم . بنابر ۵-۷-۱ داریم

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \qquad (۱)$$

از طرفی داریم

$$f'(x)=(x^{\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

بنابراین ، رابطه (۱) به صورت زیر در می آید .

$$\sqrt[4]{x+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x}+\frac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x^3}} \qquad (۲)$$

اکنون فرض می کنیم $x=16$ و $\Delta x=2$ از رابطه (۲) نتیجه می شود .

$$\sqrt[4]{18} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{2}{4\sqrt[4]{16^3}} = 2 + \frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}}$$

$$\approx 2 + \frac{1}{16} = 2 + 0/0625$$

$$\approx 2/0625$$

۵-۷-۷ مثال :

با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sin 46^\circ$ را حساب کنید .

حل :

فرض کنید $f(x)=\sin x$، بنابر ۵-۷-۱ داریم

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

پس $f'(x)=\cos x$ و رابطه بالا به صورت زیر در می آید .

$$\sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\cos x\cdot\Delta x$$

اکنون فرض می کنیم $x=45^\circ$ و $\Delta x=1^\circ$ یعنی $\Delta x=\frac{\pi}{180}=\frac{3/14}{180}$ رادیان باشد .
به دست می آوریم

$$\sin(45+1)^\circ\approx \sin 45^\circ+\cos 45^\circ\times\frac{3/14}{180}$$

$$\approx\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3/14}{180}$$

$$\approx 0/7071+0/0123$$

$$\approx 0/7194$$

۵-۷-۱۰ مفهوم خطا :

در اندازه گیریها معمولاً مقدار اندازه گیری شده با مقدار واقعي متفاوت است .این

تفاوت را با Δx نشان داده می شود ، اعم ز اینکه مثبت باشد یا منفی ، خطای مطلق

اندازه گیری x می نامیم . با معیاری بانام خطای نسبی ، می توان دقت اندازه گیری

را بهتر سنجید . این خطا که بیشتر به صورت در صد بیان می شود ، خطای درصد

یا در صد خطا نامیده می شود. به تعریف زیر توجه کنید .

۵-۷-۱۱ تعریف :

اگر du مقدار خطایی باشد که در محاسبه u مر تکب شده ایم، مقدار $\frac{du}{u}$ را

خطای نسبی و $100\frac{du}{u}$ را خطای درصد یا درصد خطا می نامیم .

۵-۷-۱۲ مثال :

طول ضلع مربعی با حداکثر خطای 0/05 سانتی متر برابر ۱/۵ سانتی متر

اندازه گیری شده است . خطای نسبی و خطای درصد در محاسبه مساحت این مربع را محاسبه کنید .

حل :

فرض می کنیم x طول ضلع مربع و s مساحت مربع باشد .پس $s = x^2$ و ds=2xdx.

بنابر فرض مسئله داریم dx=0/05 و x=5/1 .بنابراین ، خطای نسبی در محاسبه

مساحت این مربع برابر است با

$$\text{خطای نسبی} = \frac{ds}{s} = \frac{2xdx}{x^2} = \frac{2dx}{x} = \frac{2(0/05)}{5/1} = 0/0196$$

$$\text{خطای درصد} = 100\frac{ds}{s} = 100(0/0196) = 1/96$$

اکنون با معرفی توابع چند متغیره به تعریف مشتقهای جزئی و دیفرانسیل کل تابع

می پردازیم .

۵-۷-۱۶ تعریف :

تا کنون با توابعی سر وکار داشتیم که تنها به یک متغیر وابسته بودند ، این دسته

توابع را توابع یک متغیره می نامیم . در صورتی که تابعی به بیش از یک متغیر

بستگی داشته باشد، آن ا تابع چند متغیره می گوییم .

برای مثال ، می دانیم که حجم یک مکعب مستطیل بستگی به طول ،عـرض،

و ارتفاع آن دارد . به عبارت دیگرV ، حجم مکعب مستطیل ، تابعی از طول x

عرضy وارتفاع z آن است .پس

$$V = f(x, y, z)$$

از طرفی حجم مکعب مستطیل برابر حاصل ضرب طول ، عرض ، و ارتفاع آن

است ، پس داریم

$$f(x,y,z)=xyz$$

بنابراین $f(x,y,z)$ ، تابع حجم مکعب مستطیل ،یک تابع سه متغیره است .

۵-۷-۱۷ مثال :

فرض کنید در زمان معینی تعداد تولیدات کارخانه ای با x واحد نیروی کارو y واحد سرمایه ، برابر $f(x, y) = 70x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ باشد .

الف) با به کارگیری ۲۷واحد نیروی کارو۸ واحد سرمایه ، چند واحد محصول تولید می شود؟

ب) نشان دهید که اگر مقادیر نیروی کار وسرمایه دو برابر شود ، تعداد تولیدات کارخانه نیز دو برابر خواهد شد .

حل :

الف) تعداد تولیدات کارخانه به ازای ۲۷ واحد نیروی کار و ۸ واحد سرمایه برابر است با

$$f(27,8) = 70(27)^{\frac{2}{3}}(8)^{\frac{1}{3}} = 70(9)(2) = 1260$$

ب) مقدار تولید حاصل از به کار گیری a واحد نیروی کار و b واحد سرمایه برابر

$$f(a,b) = 70\,a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}$$

مقدار تولید حاصل از به کارگیری 2a واحد نیروی کار و 2b واحد سرمایه برابر f(2a,2b) است و داریم

$$f(2a,2b) = 70(2a)^{\frac{2}{3}}(2b)^{\frac{1}{3}} = 70(2)^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}(2)^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

$$= 70(2)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2f(a,b)$$

۵-۷-۱۸ مثال :

فروشنده یک نوع ماشین حسابگر الکترونیکی در می یابد که تحت شرایط خاصی، تعداد ماشینهای حسابگری که می تواند بفروشد از معادله

$$f(p,t)=-p+60t-0/02pt$$

به دست می آید که در آن p قیمت یک ماشین حسابگر و t مبلغی به تومان است که صرف تبلیغات می شود . اگر قیمت هر دستگاه ماشین حسابگر ۱۰۰۰ تومان و هزینه تبلیغات ۲۵۰ تومان باشد ، فروشنده چند ماشین حسابگر می تواند بفروشد؟

حل :

تعداد ماشین حسابهایی که می تواند بفروشد برابر است با

$$f(1000,250)=-1000+60(250)-0/02(1000)(250)$$

۵-۷-۱۹ مشتقهای جزئی تابع دو متغیره :

فرض می کنیم $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره از متغیرهای x و y باشد،مشتق جزئی

تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیر x با نماد f_x یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان می دهیم و برابر مشتق

$f(x,y)$ نسبت به x تعریف می کنیم .هنگامی که y ثابت و $f(x,y)$ تنها تابعی از x در نظر گرفته

شود.مشتق جزئی تابع $f(x,y)$ نسبت به y را با f_y یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان می دهیم که بنابر تعریف

برابر است با مشتق تابع $f(x,y)$ نسبت به y هنگامی که x ثابت و $f(x,y)$ تنها تابعی از y فرض شود .

۵-۷-۲۰ مثال :

فرض کنید $f(x,y)=3x^2+2xy+5y^3$ ، مشتقهای جزئی f را محاسبه کنید .

حل :

مشتق جزئی f نسبت به x برابر است با

$$f_x = 6x + 2y + 0 = 6x + 2y$$

مشتق جزئی f نسبت به y برابر است با

$$f_y = 0 + 2x + 15y^2 = 2x + 15y^2$$

۵-۷-۲۲ مثال :

مشتق های جزئی $f(x,y,z) = ye^x + ze^y + xe^z$ را محاسبه کنید .

حل :

مشتق جزئی f نسبت متغیر x برابر است با

$$f_y = e^x + ze^y + 0 = e^x + ze^y$$

مشتق جزئی f نسبت به متغیر z برابراست با

$$f_z = 0 + e^y + xe^z = e^y + xe^z$$

فصل ششم:

کاربردهای مشتق

هدف کلی:

هدف کلی فصل این است که با بعضی از کاربردهای مشتق از جمله تعیین

توابع صعودی یانزولی،ماکسیموم ومینیموم نسبی و مطلق تابع،رسم نمودارتابع،

تقعرومحدب ونقطه عطف نمودار تابع ،وروش رفع ابهام از صورتهای مبهم حدی آشنا شوید.

هدفهای رفتاری:

از شما انتظار مي رود که پس از پایان مطالعه این فصل بتوانید:

۱) برای تابع داده شده ،بازه هايي را که تابع در آنها صعودی یا نزولی است تعیین کنید.

۲) نقاط بحرانی توابع داده شده را تعیین کنید.

۳) ماکسیموم ومینیموم نسبی توابع داده شده را با استفاده از آزمون های مشتق اول ودوم به دست آورید.

۴) ماکسیموم و مینیموم مطلق توابع داده شده را در بازه های مورد نظرتعیین کنید.

۵) تقعر وتحدب ونقطه عطف احتمالی نمودارتابع داده شده را مشخص کنید.

۶) مجانبهای افقی وقائم نمودار تابع داده شده در صورت وجود را تعیین کنید.

۷) مجانبهای مایل نمودار تابع داده شده را در صورت وجود تعیین کنید.

۸) محور های تقارن ومرکز تقارن نمودار تابع داده شده را،در صورت وجود، تعیین کنید.

۹) نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

۱۰) از صورتهای مبهم حدی داده شده رفع ابهام کنید.

۱۱) قضیه هوپیتال را در حالت های مختلف توضیح بدهید ودر مسائل مربوط به کار ببرید.

مقدمه:

در فصل پنجم با برخی از کاربرد های مشتق آشنا شدیم.در این فصل کاربردهای دیگری از مشتق را در تعیین بازه های صعودی ونزولی،نقاط ماکسیموم ومینیموم، تقعر وتحدب نمودار تابع،ودر رفع ابهام از صورتهای مبهم بیان مي کنیم.

۶-۱-۱ قضیه(آزمون یکنوايي):

فرض مي کنیم تابع f دربازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند.

۱) اگر برای هر $\mathbf{x \in (a,b)}$ داشته باشیم $\mathbf{f'(x) > 0}$ ، آنگاه f صعودی است.

۲)اگر برای هر $\mathbf{x \in (a,b)}$ داشته باشیم $\mathbf{f'(x) < 0}$ ، آنگاه f ، نزولی است.

۶-۱-۲مثال:

تابع $f(x) = 3x^2 + 5$ را روی R در نظر بگیرید.تعیین کنید f روی چه بازه هایی صعودی وروی چه بازه هایی نزولی است.

حل:

چون $f'(x) = 6x$ روشن است که برای هر $x > 0$،داریم $f'(x) > 0$ وبرای هر $x<0$ داریم $f'(x) < 0$.پس f روی R^+ صعودی وروی R^- نزولی است.توجه کنید که به ازای $x=0$ داریم $f'(x) = 0$.مطالب بالا را می توانیم در جدول زیر خلاصه کنیم:

✠	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	نزولي		صعودي

مثال:

نقاط بحرانی توابع

الف) $f(x)=2x^3-4$ ب) $f(x)=x^3+3x^2-2$ را تعیین کنید.

حل:

الف) $f'(x)=6x^2=0 \Rightarrow 6x^2=0 \Rightarrow x=0$

ب) $f'(x)=3x^2+6x=0 \Rightarrow x=0 \;,\; x=-2$

۶-۱-۶ نتیجه:

باتوجه به قضیه ۶-۱-۱- وتعریف ۶-۱-۴ برای تعیین بازه هايي که تابع

روی آنها صعودی و یا نزولی است ، باید نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را به دست

آوردو علامت $f'(x)$ را تعیین کرد.

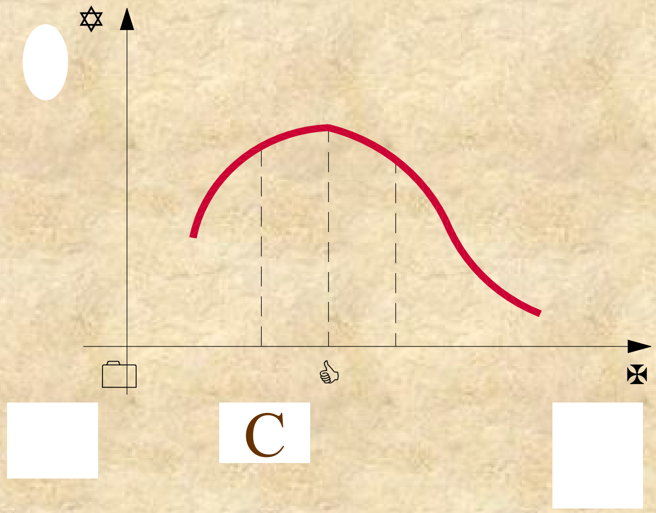
۲-۶ ماکسیموم و مینیموم تابع

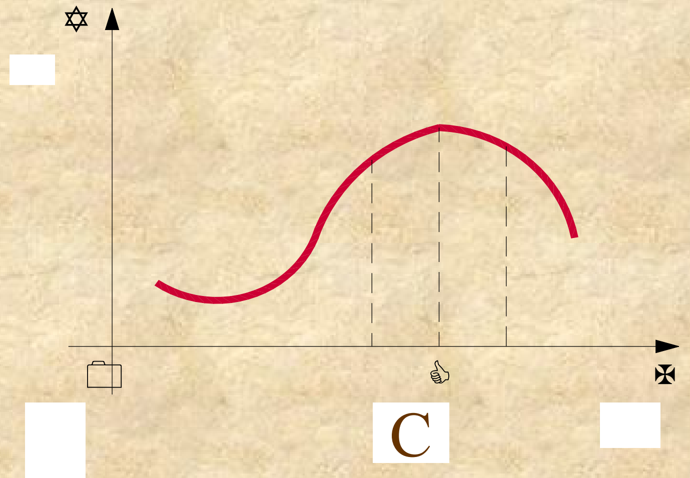
۶-۲-۱ تعریف:می گوییم تابع f در $x=c$ یک ماکسیموم نسبی یاماکسیموم موضعی

دارد.اگربرای هر x ازبازه بازی که شامل c باشد داشته باشیم

$$f(c) \ge f(x)$$

شکلهای ۶-۱ و۶-۲ نمودارهای توابعی را نشان می دهند که در c ماکسیموم نسبی دارند.



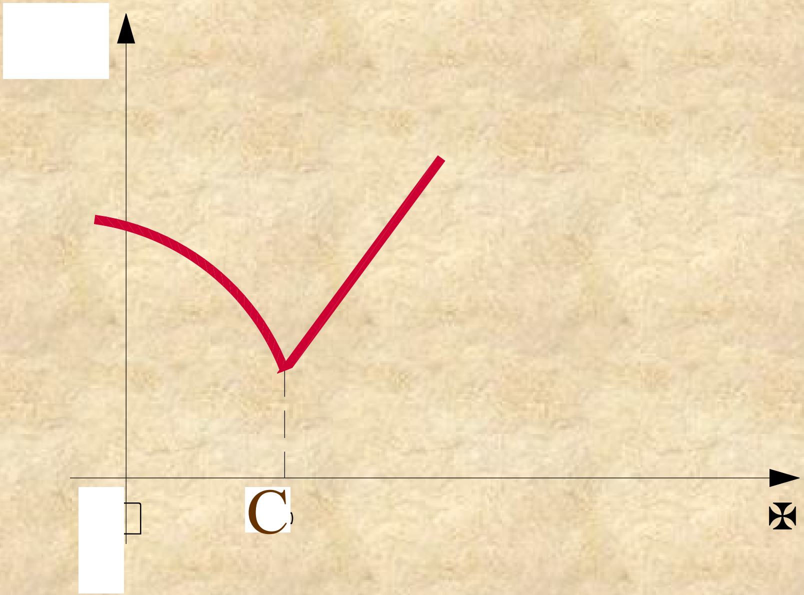


۶-۲-۲ تعریف:

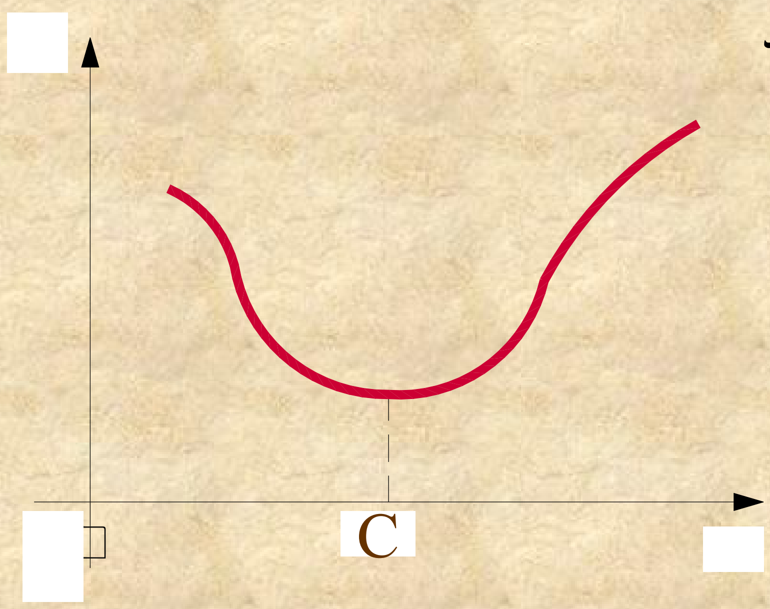
می گوییم تابع f در x=c یک مینیموم نسبی یا مینیموم موضعی دارد.اگر برای هر x از بازه بازی که شامل c باشد داشته باشیم

$$f(c) \le f(x)$$

شکلهای ۶-۳ و۶-۴ نمودارهای توابعی را نشان می دهند که در c مینیموم نسبی دارند



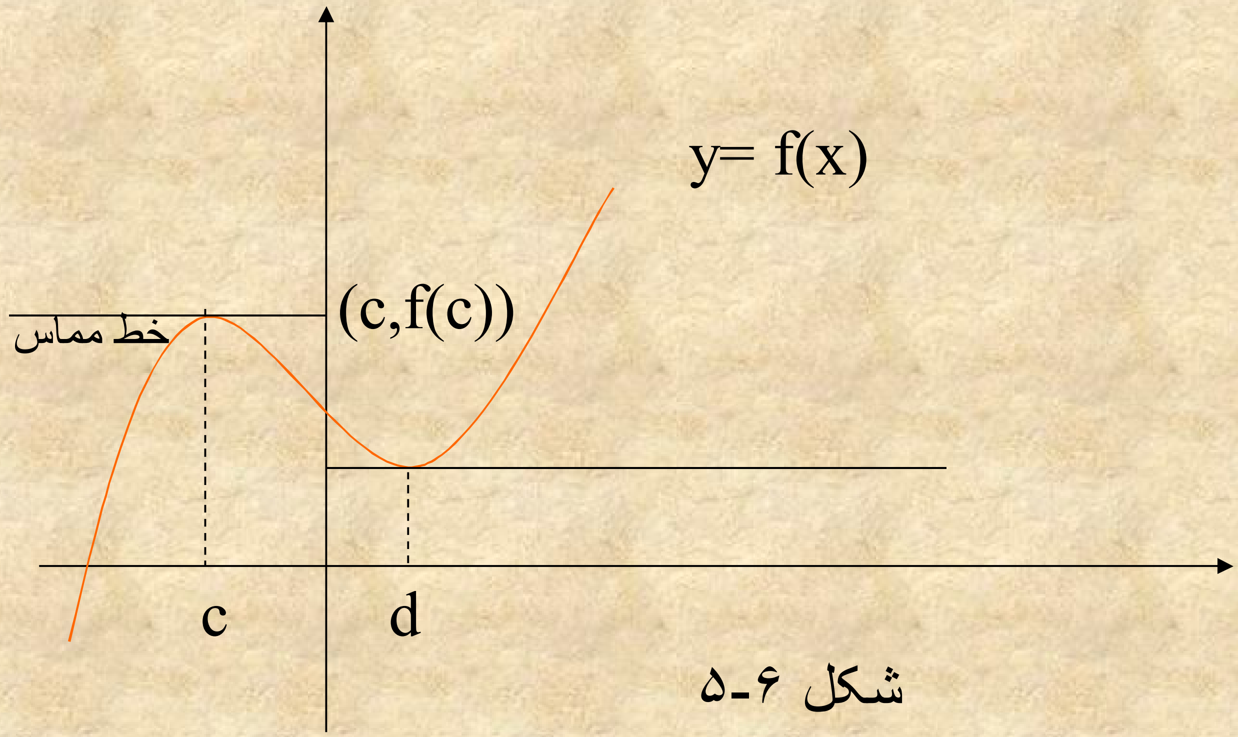
شکل ۶-۴



شکل ۶-۳

۶-۲-۶ تعبیر هندسی نقاط اکسترموم:

تعبیر هندسی قضیه۶-۲-۴ این است که اگر تابع f در c مشتق پذیر باشد و در این نقطه اکسترموم نسبی داشته باشد ، آنگاه مماس بر$y=f(x)$ در نقطه $(c,f(c))$ افقی است . به شکل ۶-۵ توجه کنید.



شکل ۶-۵

۶-۲-۷ تذکر: عکس قضیه ۶-۲-۴ درست نیست ،یعنی تابعی مانند f وجود

دارد به طوری که $f'(x)$ به ازای مقادیری از x صفراست ولی این تابع دراین نقاط

ماکسیموم یا مینیموم نسبی ندارد.برای مثال فرض کنید $f(x) = (x-1)^3$ داریم

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

از معادله $f'(x) = 0$ نتیجه می شود x=1 ،پس $f'(1) = 0$. اما به ازای x<1 ،

داریم f(x)<0 وبه ازای x>1 داریم f(x)>0 . درنتیجه f در x=1 نه ماکسیموم نسبی

دارد و نه مینیموم نسبی .

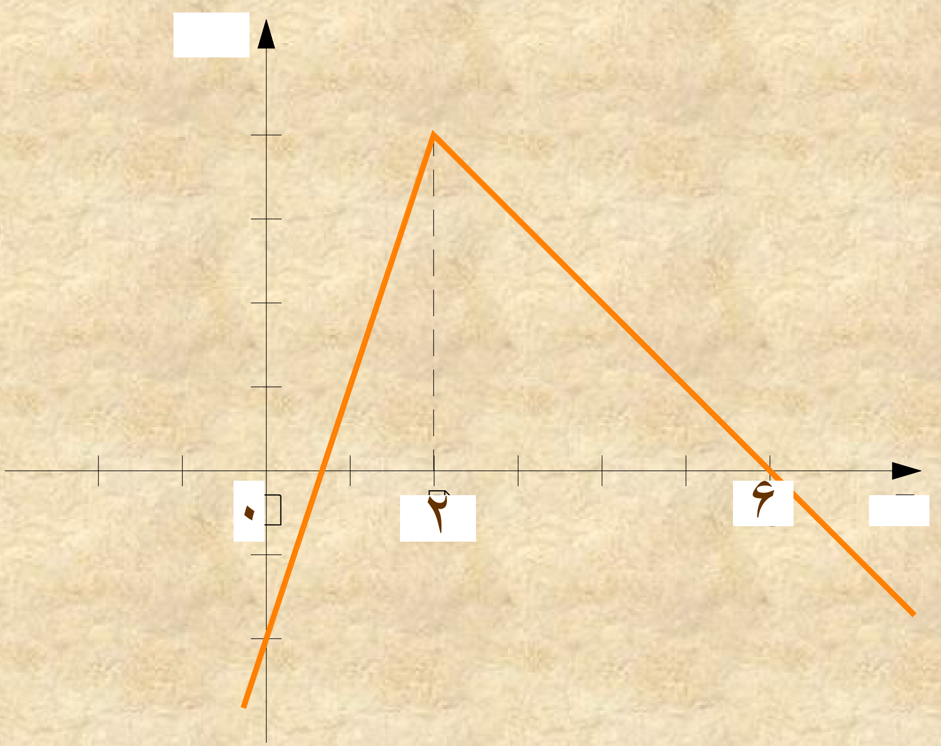
۶-۲-۸ نکته: ممکن است تابعی در نقطه ای اکسترموم نسبی داشته باشد اما درآن نقطه مشتق پذیر نباشد. برای مثال فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \leq 2 \\ 6 - x & x > 2 \end{cases}$$

نموداراین تابع درشکل ۶-۶ رسم شده است.

تابع f در x=2 ماکسیموم نسبی دارد ، اما چون $f'_-(2) = 3$ و $f'_+(2) = -1$ است،

در نتیجه $f'(2)$ وجود ندارد.



۶-۲-۹ نتیجه:

فرض می کنیم تابع f در نقطه c تعریف شده باشد،شرط لازم برای اینکه تابع

f در نقطه c اکسترموم نسبی داشته باشد این است که c یک نقطه بحرانی

تابع f باشد،به عبارت دیگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

۶-۲-۱۰ قضیه (آزمون مشتق اول برای اکسترموم های نسبی):

فرض می کنیم تابع f در بازه بازی از نقطه بحرانی c مانند (a,b) پیوسته باشد

و در تمام نقاط آن جز احتمالاً درc مشتق پذیر باشد.

۱) اگر$f'(x)$در بازه باز(a,c) مثبت ودربازه باز(a,b) منفی باشد آنگاه

درx=c یک ماکسیموم نسبی دارد.

۲) اگر $f'(x)$ دربازه باز(a,c) منفـی و دربازه باز(c,b) مثبـت باشد آنگــاه

F در$x=c$ یک مینیمـوم نسبـی دارد.

۳)اگر هیـچ کدام از(۱) و(۲) برقـرار نباشـد،آنگــاه f در$x=c$ ماکسیمـوم

یا مینیمــوم نسبـی ندارد.

۶-۲-۱۲ مثال:

با استفاده ازآزمون مشتق اول،ماکسیموم و مینیموم نسبی تابع

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+12$ را بدست آورید.

حل:

مشتق این تابع برابراست با $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

ریشه های معادله $f'(x) = 0$ عبارت اند از $x=2$ و $x=3$.بنابراین ۲و۳ نقاط بحرانی تابع f اند.

نقاط بحرانی تابع را درجدول قرارمی دهیم وآزمون مشتق اول را به کارمی بریم.

نتیجه می گیریم مقادیرماکسیموم ومینیموم نسبی تابع به ترتیب عبارتند از:

$$f(3) = \frac{33}{2} \quad \text{و} \quad f(2) = \frac{50}{3}$$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		صعودي		نزولي		صعودي	
			ماکسيموم نسبي		مينيموم نسبي		

۶-۲-۱۶قضیه(آزمون مشتق دوم برای اکسترموم های نسبی):

فرض می کنیم c یک نقطه بحرانی تابع f باشد و $f'(c)=0$. همچنین

فرض می کنیم f' و f'' در بازه بازی شامل c وجود

داشته باشند.

۱) اگر $f''(c)<0$ ،آنگاه f در c ماکسیموم نسبی دارد.

۲) اگر $f''(c)>0$ ،آنگاه f در c مینیموم نسبی دارد.

۶-۲-۱۸ مثال:

فرض کنید $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ با استفاده از آزمون مشتق دوم ماکسیموم

و مینیموم نسبی تابع f را به دست آورید.

حل:

مشتق اول تابع f برابر است با:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

ریشه های معادله $f'(x) = 0$ عبارت اند از x=1 و x=3 .بنابراین ۱و۳ نقاط

بحرانی تابع f اند.مشتق دوم این تابع برابر است با: $f''(x) = 6x - 12$

مقادیر تابع f'' در ۱و۳ عبارت اند از:

$$f''(x) = 6 - 12 = -6 < 0$$
$$f''(x) = 6(3) - 12 = 6 > 0$$

در نتیجه بنابر آزمون مشتق دوم ،این تابع در $x=1$ ماکسیموم نسبی ودر $x=3$ مینیموم نسبی دارد .مقادیر ماکسیموم ومینیموم نسبی عبارت اند از:

$$f(1)=7 \quad , \quad f(3)=3$$

6-۲-۱۹ نکته:

اگر در مورد تابع f داشته باشیم $f'(c) = f''(c) = 0$، آزمون مشتق دوم اطلاعاتی از ماکسیموم نسبی یا مینیموم نسبی بودن c به دست نمی دهد.

در چنین مواردی باید از آزمون مشتق اول استفاده کرد.

برای مثال ،فرض می کنیم $f(x)=(x-2)^4+1$ مشتق های اول ودوم f عبارت اند از:

$$f'(x)=4(x-2)^3$$

$$f''(x)=12(x-2)^2$$

از $f'(x)=0$ نتیجه مـی شود x=2.پس ۲ نقطه بحرانی تابع f است.ازطرفـی داریـم $f''(2)=0$.برای تعیین ماکسیموم یا مینیموم نسبی تابع بـاید ازآزمون مشتق اول استفاده کرد.

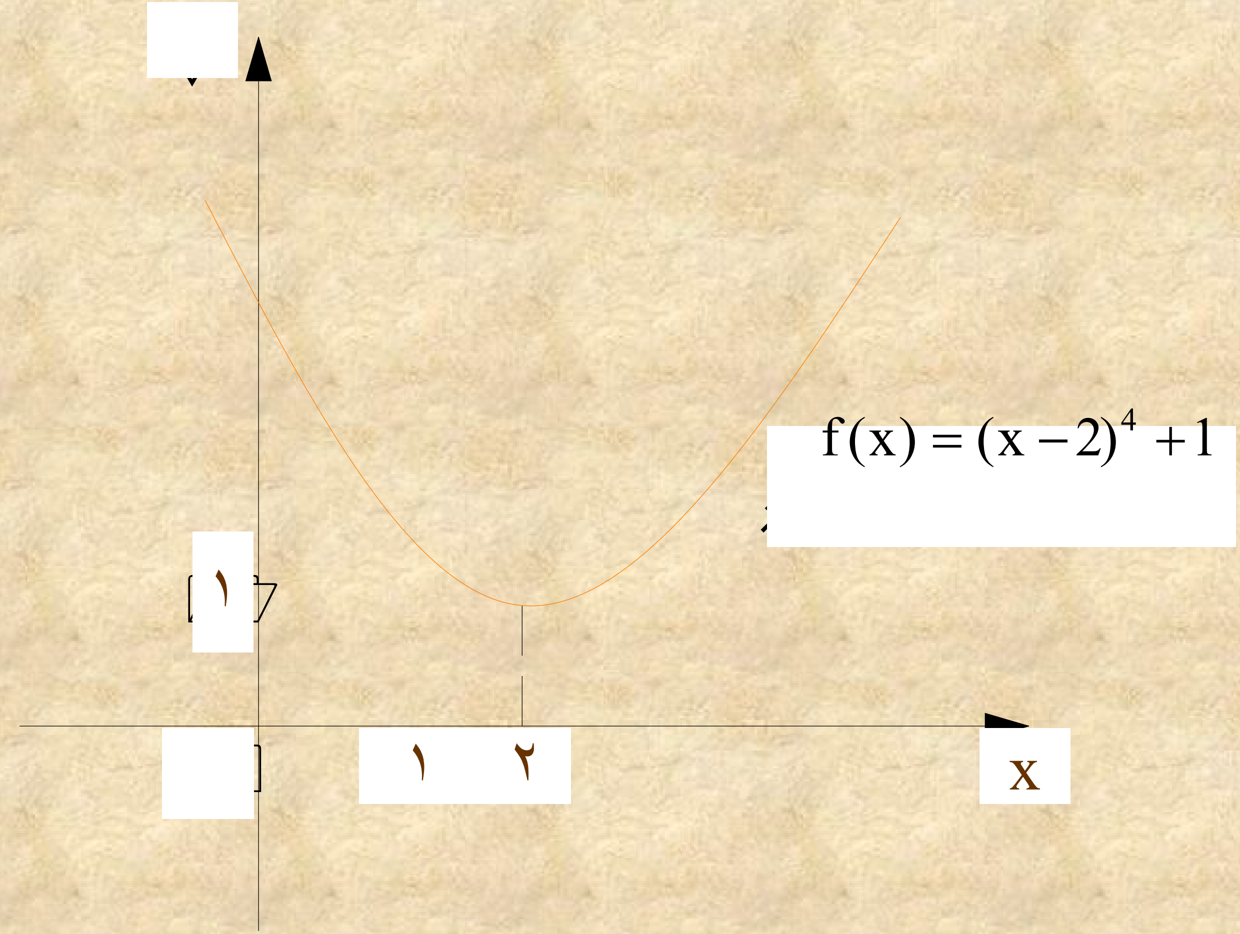
x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$f'(x)$	–	۰	–
$f(x)$	نزولي		صعودي

مینیموم نسبي

تابع f در $x=2$ مینیموم نسبی دارد.مقدار این مینیموم برابر است با:

$f(2)=1$

نمودار تابع f در شکل ۶-۱۰ رسم شده است.



۶-۲-۲۲ تعریف:

تابع f واعداد c و d را دردامنه تابع f درنظر می گیریم.

الف) f(c) را ماکسیموم مطلق تابع f روی دامنه اش می نامیم،اگر برای هر x

از دامنه تابع f داشته باشیم:

$$f(c) \geq f(x)$$

ب) f(d) را مینیموم مطلق تابع f روی دامنه اش می نامیم،در صورتی که برای

هر x از دامنه تابع f داشته باشیم:

$$f(d) \leq f(x)$$

ماکسیموم مطلق یا مینیموم مطلق تابع را اکسترموم مطلق تابع نیز می گوییم.

✪توجه کنید که می توان تابعی مانند f با دامنه I یافت که f روی I اکسترموم مطلق نداشته باشد.ولی اگرf وI دارای شرایط خاصی باشند،آنگاه تابع f روی I دارای اکسترموم مطلق خواهد بود.

قضیه زیر این شرایط را معرفی می کند.ازاثبات این قضیه صرف نظر می کنیم.

۶-۲-۲۳ قضیه:

اگر تابع f در بازه بسته [a,b]پیوسته باشد،آنگاه f روی اینبازه دارای ماکسیموم و مینیموم مطلق است.

روش تعیین اکسترموم های مطلق تابع:

برای تعیین ماکسیموم ومینیموممطلق تابع f روی بازه بسته [a,b] ،درصورتی که f دربازه باز(a,b) مشتق پذیر باشد،ابتدا به کمک آزمون مشتق اول یا آزمون مشتق دوم،ماکسیموم و مینیموم هاینسبی این تابع را دربازه داده شده به دست می آوریم.

سپس مقادیرf(a) وf(b) را محاسبه وآنها را با ماکسیموم ومینیموم های نسبی تابع مقایسه می کنیم.

کوچکترین این مقادیر،مینیموم مطلق و بزرگترین آنها ماکسیموم مطلق تابع f خواهد بود.

به مثال زیر در این مورد توجه کنید.

۶-۲-۲۵ مثال:

ماکسیموم ومینیموم مطلق تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ دربازه بسته $[0,3]$ به دست آورید.

حل:

مشتق تابع f برابر است با: $f'(x)=6x^2-18x+12$

ریشه های معادله $f'(x)=0$ عبارت اند از $x=1$ و $x=2$، وبنابراین ۱ و ۲ نقاط بحرانی تابع اند.

اکنون آزمون مشتق اول را به کار می بریم وجدول زیررا تشکیل می دهیم.

x	0	۱		۲		۳
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	صعودي		نزولي		صعودي	
		ماکسیموم نسبي		مینیموم نسبي		

درجدول دیده می شود که f در $x=1$ ماکسیموم نسبی و در $x=2$ مینیموم نسبی دارد.

مقادیراین ماکسیموم ومینیموم نسبی به ترتیب برابرند با:

$f(1)=5$

$f(2)=4$

مقادیر تابع درنقاط ۰و۳ برابرند با:

$f(0)=0 \quad , \quad f(3)=9$

بنابراین داریم:

$f(0)=0 \ , \ f(1)=5 \ , \ f(2)=4 \ , \ f(3)=9$

در نتیجه $f(0)=0$ مینیموم مطلق و $f(3)=9$ ماکسیموم مطلق تابع f است.

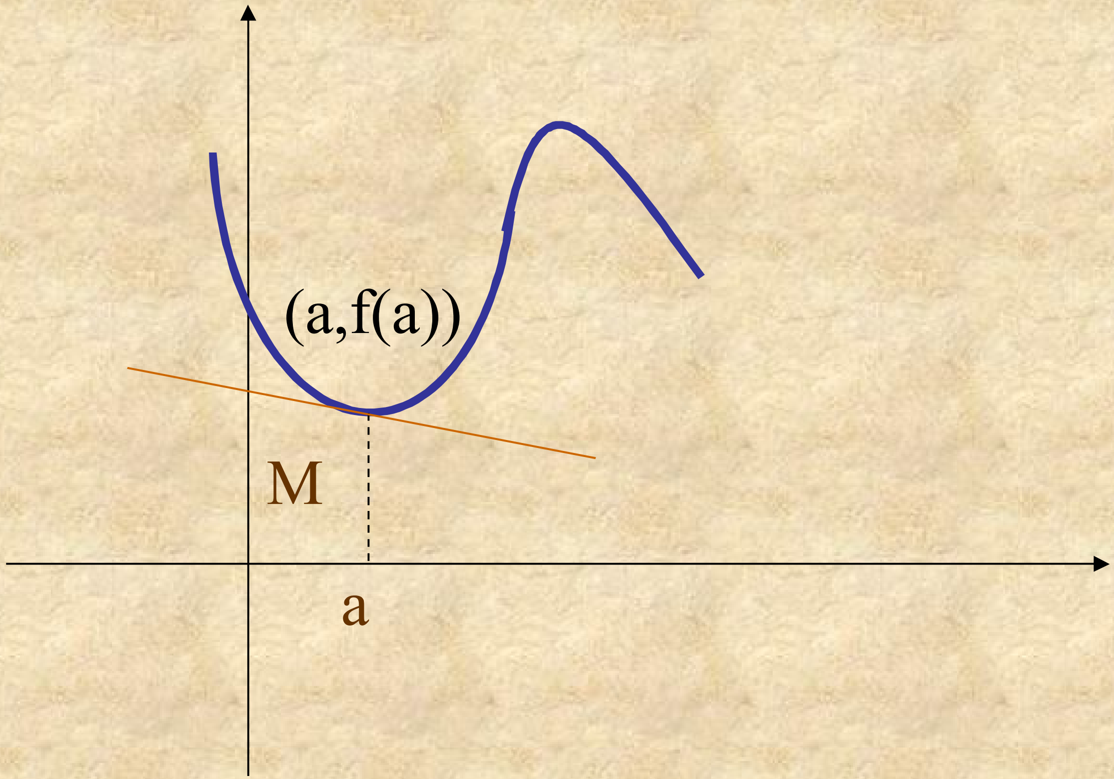
۶-۳ تقعر و تحدب ونقطه عطف نمودار تابع

۶-۳-۱ تعریف:نمودارتابع $y=f(x)$ را درنقطه $(a,f(a))$ مقعرمی نامیم هرگاه

۱) $f'(a)$ موجود باشد.

۲) نمودار تابع f دربازه بازی شامل $x=a$ دربالای خط مماس برنمودار دراین نقطه قرارگیرد.

شکل ۶-۱۱ بخشی از نمودار یک تابع را که در نقطه M مقعراست نشان می دهد.



اگرنمودار تابع f در هرنقطه ازبازه I مقعرباشد،می گوییم نمودارf

روی بازه I مقعر است.

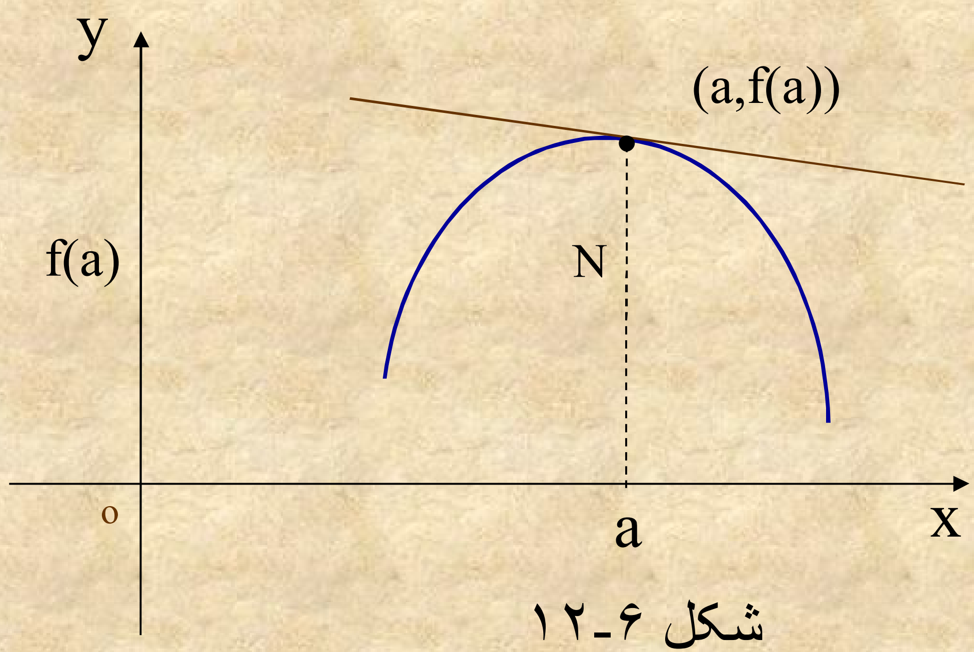
۶-۳-۲ تعریف:

نمودارتابع $y=f(x)$ را در نقطه $(a,f(a))$ محدب می نامیم اگر:

۱) $f'(a)$ موجود باشد.

۲) نمودارتابع f دربازه بازی شامل $x=a$ درپایین خط مماس بر

نمودار در این نقطه واقع شود.



شکل ۶-۱۲

شکل ۶-۱۲بخشی از نمودار

یک تابع را نشان مي دهد،

که درنقطه N محدب است.

اگرنمودارتابع f درهرنقطه ازبازه I محدب باشد،می گوییم نمودارf روی

بازه I محدب است.

قضیه زیرآزمونی برای تعیین تقعرو تحدب یک منحنی به دست می دهد.

از اثبات این قضیـه صرف نظر می شـود.

۶-۳-۳ قضیه:

فرض می کنیم تابع f روی بازه بازی شامل x=c دارای مشتقهای اول و

دوم باشد.

۱)اگر $f''(c)>0$ ،آنگاه نمودارf درنقطه (c,f(c)) مقعـر است.

۲)اگر $f''(c)<0$ ،آنگاه نمودارf در نقطه (c,f(c)) محـدب است.

۶-۳-۴ مثال:

تعیین کنید نمودارتابع $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ درچه بازه ای محدب و درچه بازه ای مقعـر است.

حل:

مشتقهای اول ودوم تابع برابر است با

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

ریشه های $f''(x) = 0$ عبارت اند از $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ و $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		مقعر		محدب		مقعر	

بنابراین،نمودار f دربازه های $(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ و $(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty)$ مقعر و دربازه $(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ محدب است.

۶-۳-۵ تعریف:

نقطه $(a,f(a))$ را نقطه عطف نمودارتابع f می نامیم اگر

۱) $f'(a)$ موجود باشد.

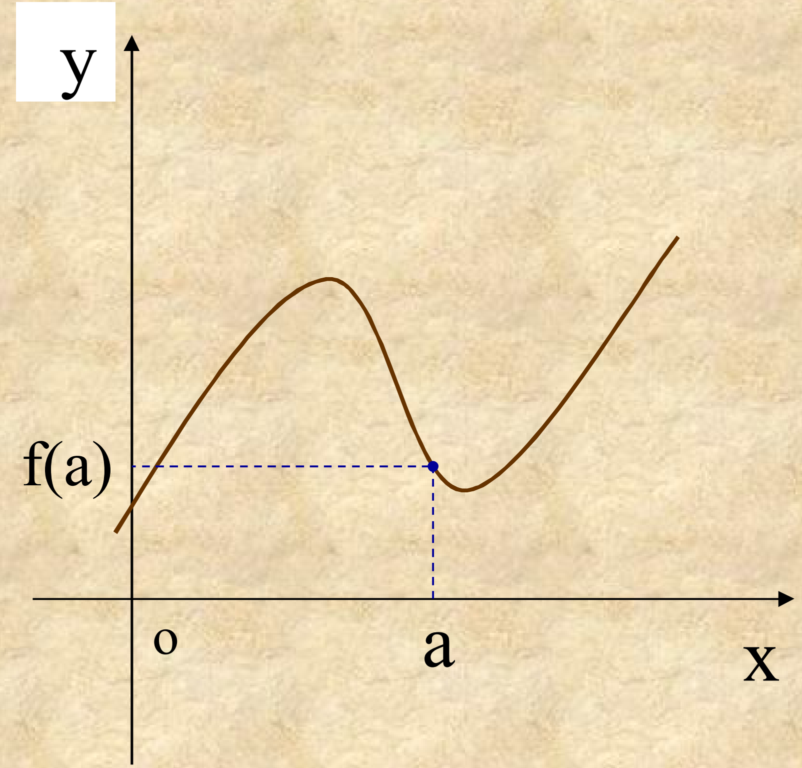
۲) بازه بازی شامل a وجود داشته باشد به گونه ای که به ازای هر x ازاین بازه

الف) اگر x>a آنگاه $f''(x)>0$ و اگر x<a آنگاه $f''(x)<0$.

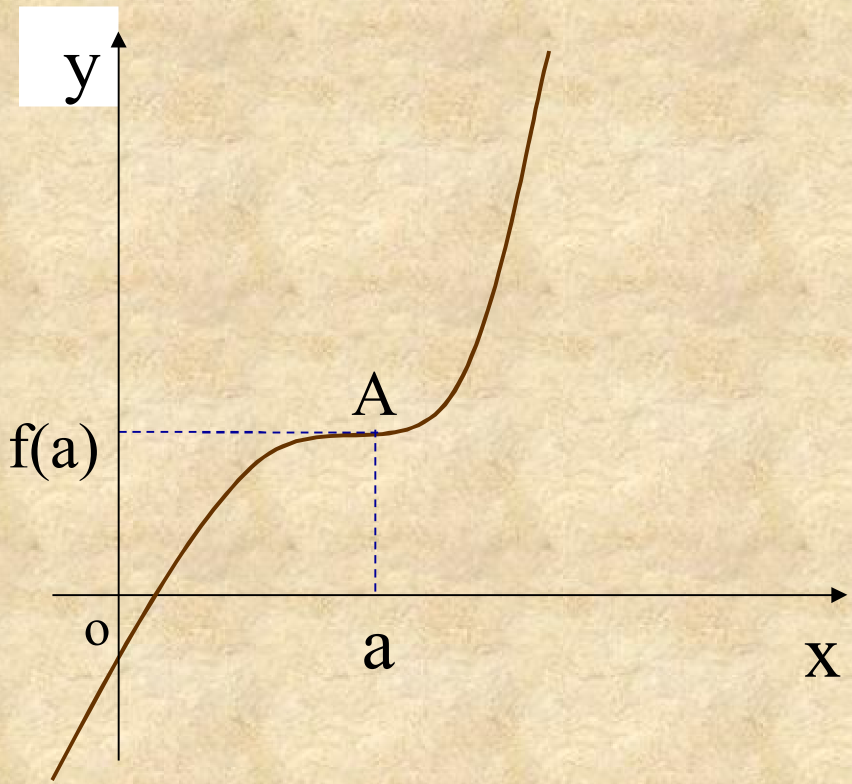
یا

ب) اگر x>a آنگاه $f''(x)<0$ و اگر x<a آنگاه $f''(x)>0$.

شکلهای ۶-۱۳ و۶-۱۴ بخشی ازنمودارتابعی را نشان می دهند که A یک نقطه عطف آن است.



شکل ۶ـ۱۳



شکل ۶ـ۱۴

۶-۳-۸ مثال:

بازه هایی را که نمودارتابع $f(x)=2x^3+3x^2-7x+1$ درآنها مقعر

یا محدب است تعیین کنید.نقاط عطف نمودارتابع را نیزبه دست آورید.

حل:

مشتقهای اول ودوم تابع برابراست با: $f'(x)=6x^2+6x-7$

$$f''(x)=12x+6$$

ریشه معادله $f''(x)=0$ عبارت است از $x=-\frac{1}{2}$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	o	$+$
$f(x)$	محدب	نقطه عطف	مقعر

بنابراین ،نمودارتابع دربازه $(-\infty, -\frac{1}{2})$ محدب ودربازه $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ مقعراست.

نقطه $(-\frac{1}{2}, 5)$ نقطه عطف نمودارتابع است.

۶-۳-۱۱ قضیه:

فرض می کنیم تابع f دربازه بازی شامل a مشتق پذیرو(a,f(a)) نقطه عطف

نمودار تابع f باشد.اگر $f''(a)$ موجود باشد آنگاه $f''(a)=0$

۶-۳-۱۳ روش تعیین نقاط عطف نمودار تابع:

برای تعیین نقاط عطف احتمالی نمودارتابع f ،باید x هایی ازدامنه تابع را بررسی کنیم که به ازای آنها

الف) $f''(x)=0$.

ب) $f''(x)$ وجود نداشته باشد.

۴-۶رسم نمودار یک تابع

۶-۴-۱ مقدمه:

دراین بخش ابتدا خلاصه ای ازمفاهیم مجانب ومحورتقارن ومرکزتقارن را یادآوری می کنیم وسپس روش رسم نمودارتوابع را توضیح می دهیم.

۶-۴-۲ تعریف:

تابع $y=f(x)$ را درنظرمی گیریم . اگرتابع f هنگامی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ یا $x \to a$ به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند،آنگاه خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار f می نامیم.

درتابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ اگرصورت ومخرج عامل مشترکی نداشته باشند،مجانب قائم نمودار f ازحل معادله $q(x)=0$ به دست می آید.

۶-۴-۳ مثال:

مجانبهای قائم تابع $f(x)=\dfrac{x-3}{(x^2-1)(x+2)}$ تعیین کنید.

حل:

ریشه های معادله $(x^2-1)(x+2)=0$ عبارت اند از ۱، ۱-، ۲-.درنتیجه

بنابر تعریف ۶-۴-۲ مجانبهای قائم نمودار f عبارت اند ازخط های

$$x=1\,,\ x=-1\,,\ x=2$$

۶-۴-۵ تعریف:

تابع y=f(x) را درنظرمی گیریم.اگرحد تابع f هنگامی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ مساوی عدد حقیقی b باشد ، آنگاه ، خط y=b را مجانب افقی

نمودار f می نامیم.

۶-۴-۶ مثال: مجانب افقی نمودارتابع $f(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2+5x+7}$ را تعیین کنید.

حل:

داریم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-1}{2x^2+5x+7}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x-1}{2x^2+5x+7}=2$$

درنتیجه ،بنابرتعریف ۶-۴-۵، خط $y=2$ مجانب افقی نمودار f است.

۶-۴-۸ تعریف:

تابع $y=f(x)$ را در نظر مي گيريم.اگر حد تابع f وقتی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$

به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند،ممکن است نمودارتابع f دارای خط مجانب

مایلی با معادله $y=ax+b$ باشد.

برای تعیین این خط مجانب مایل به یکی از دو روش زیر عمل می کنیم.

۱) ابتدا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ را محاسبه می کنیم وآن را a می نامیم.سپس $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)$

را محاسبه می کنیم وآن را b می نامیم.معادله $y=ax+b$ معادله خط مجانب

مایل نمودار f است.

حالت $x \to -\infty$ نیز کاملاً مشابه حالت $x \to +\infty$ است.

۲)درمورد تابع گویای $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ اگردرجه تابع صورت یک واحد بِیشتراز درجه تابع مخرج باشد، از تقسیم کردن صورت بر مخرج به دست مي آوریم.

$$y = ax + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

که درآن درجه $r(x)$ از درجه $q(x)$ کمتر است.دراین صورت معادله $y=ax+b$ معادله خط مجانب مایل نمودار f خواهد بود.

۶-۴-۱۲ تعریف:

معادله $f(x,y)=0$ را درنظرمی گیریم.

۱)اگربا تبدیل y به (-y) معادله تغییرنکند، محورx ها محورتقارن نمودارمعادله $f(x,y)=0$ است.

۲)اگربا تبدیل x به (x–) معادله تغییر نکند، محورy ها محورتقارن نمودارمعادله $f(x,y)=0$ است.

۳)اگربا تبدیل x به y و y به x معادله تغییرنکند، خط $y=x$ محورتقارن نمودار معادله $f(x,y)=0$ است.

۴) اگربا تبدیل x به (-x) و y به (-y) معادله تغییرنکند، مبدأ مختصات مرکزتقارن نمودار معادله f(x,y) است.

۵) خط x=a محورتقارن نمودارمعادله f(x,y) است اگر:

$$f(2a-x,y)=f(x,y)$$

۶)خط y=b محورتقارن نمودارمعادله f(x,y) است اگر:

$$f(x,2b-y)=f(x,y)$$

۷)نقطه (a,b) مرکزتقارن نمودارمعادله f(x,y) است اگر:

$$f(2a-x\ ,2b-y)=f(x,y)$$

۶-۴-۱۳ مثال:

الف) با تبدیل y به (-y) معادله $2x + y^2 = 1$ تغییرنمی کند، زیرا:

$$2x + (-y)^2 = 2x + y^2 = 1$$

پس محـورx هامحـورتقارن نمـودارمعادله است.

ب) با تبدیـل x به (-x) معادله $y = 2x^2 - 5$ تغیـرنمی کند، زیرا:

$$2(-x)^2 - 5 = 2x^2 - 5 = y$$

درنتیجه محـورy ها محور تقارن نمــودار معادله است.

پ) با تبدیل x به y و y به x معادله $xy = 3$ تغییرنمی کند زیرا

$$yx = xy = 3$$

بنابراین، خط $y = x$ محورتقارن نمودار معادله است.

ت) با تبدیل x به (-x) و y به(-y) معادله $y = x^3$ تغییر نمی کند زیرا از

$$-y = (-x)^3 = -x^3$$

نتیجه می شود $y = x^3$،درنتیجه مبدأ مختصات مرکزتقارن نمودارمعادله است.

ث) خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ است زیرا

$$f(-\frac{b}{a} - x) = a(-\frac{b}{a} - x)^2 + b(-\frac{b}{a} - x) + c$$

$$= a(\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}x + x^2) - \frac{b^2}{a} - bx + c$$

$$= ax^2 + bx + c$$

ج) محل تلاقی مجانبهای قائم وافقی نمودار $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ یعنی نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ مرکز تقارن نمودار f است زیرا:

$$f(\frac{-2d}{c} - x) = \frac{a(\frac{-2d}{c} - x) + b}{c(\frac{-2d}{c} - x) + d}$$

$$= \frac{-2ad - acx + bc}{-2cd - c^2x + cd}$$

$$= \frac{2ad + acx - bc}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2ad + 2acx - acx - bc}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2a(cx + d) - c(ax + b)}{c(cx + d)}$$

$$= \frac{2a}{c} - \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$= \frac{2a}{c} - f(x)$$

$$= \frac{2a}{c} - y$$

۶-۴-۱۵ رسم نمودار توابع

برای رسم نمودار تابع صریح $y = f(x)$ یا تابع ضمنی (معادله) $f(x, y) = 0$

به ترتیب زیرعمل می کنیم.

۱) دامنه تابع را تعیین می کنیم.

۲) محورهای تقارن ومرکزتقارن نمودارتابع را درصورت وجود به دست می آوریم.

۳) مجانبهای نمودار تابع را درصورت وجود تعیین می کنیم.

۴) بازه هایی را که نمودارتابع درآنها صعودی یا نزولی است تعیین می کنیم.

۵) نقاط اکسترموم ماکسیموم ومینیموم نسبی ومطلق تابع را به دست می آوریم.

۶) نقاط عطف نمودارتابع را درصورت وجود پیدا می کنیم.

۷) بازه هایی را که نمودارتابع درآنها مقعریا محدب است تعیین می کنیم.

۸) اطلاعات حاصل را دریک جدول می نویسیم.

۹) با اختیارکردن چند نقطه دلبخواه (کمکی) از تابع ،منحنی همواری از نقاط به دست آمده رسم می کنیم.

۶-۴-۱۴ مثال:

نمودار تابع $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$ را رسم کنید.

حل:

مشتقهای اول ودوم تابع f برابرند با

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

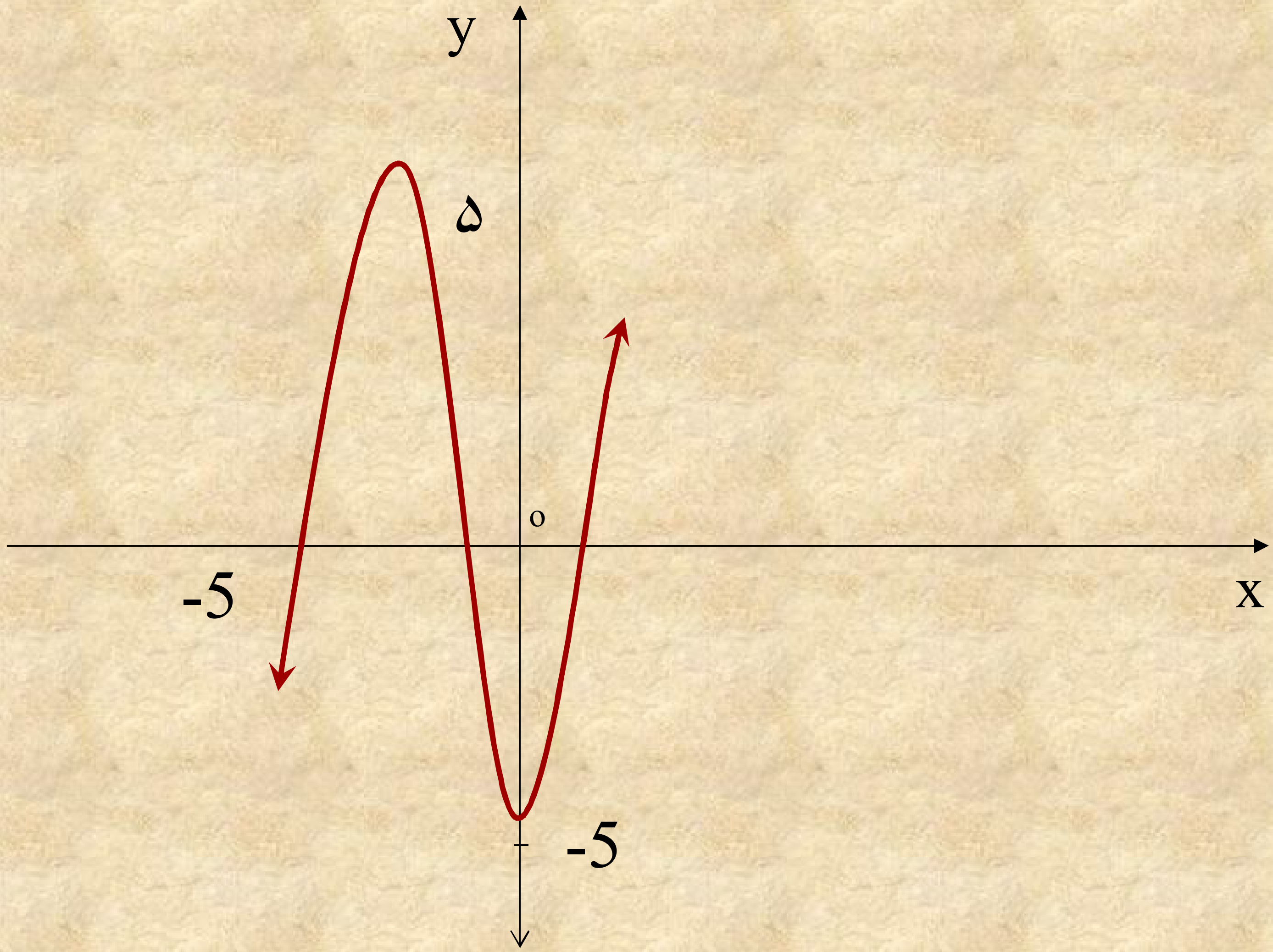
$$f''(x) = 6x + 10$$

از $f'(x) = 0$ نتیجه می شود $x = -\frac{1}{3}$ و $x = -3$

از $f''(x) = 0$ نتیجه می شود $x = -\frac{5}{3}$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$	o	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$	o	$-$		$-$	o	$+$	
$f(x)$	صعودی محدب		نزولی محدب		نزولی مقعر		صعودی مقعر	

ماکسیموم نسبی	نقطه عطف	مینیموم نسبی
5	$\frac{7}{27}$	$\frac{-121}{27}$



شکل ۶-۱۵

۶-۴-۱۷ مثال:

نمودار تابع $f(x)=9x+\frac{1}{x}$ را رسم کنید.

حل:

مشتقهای اول و دوم تابع f برابرند با:

$$f'(x)=9-\frac{1}{x^2}=\frac{9x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		o		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$	وجود ندارد	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$	o	$-$	وجود ندارد	$-$	o	$+$	
$f(x)$	صعودی ومحدب		نزولی و محدب		نزولی و محدب		صعودی ومقعر	
		ماکسیموم نسبی				مینیموم نسبی		

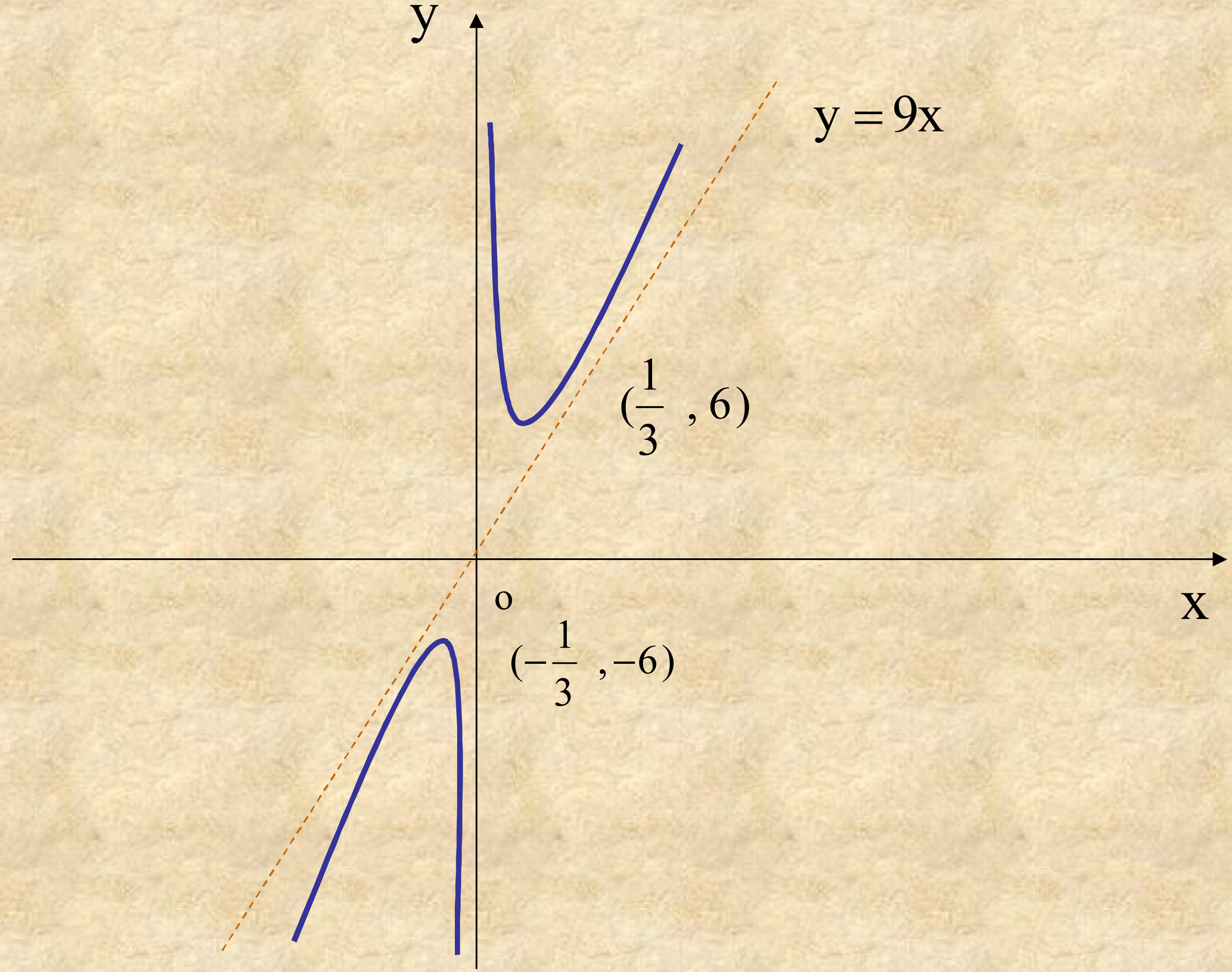
روشن است که خط $y=9x$ مجانب مایل نمودار $y=9x+\frac{1}{x}$ است.

ازطرفی داریم

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (9x + \frac{1}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (9x + \frac{1}{x}) = -\infty$$

پس $x=0$ یعنی محورy ها مجانب قائم نمودار f است.



شکل ۶-۱۶

۶-۴-۱۸ مثال:

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}3(x-2)^2 & x\le 2\\ (2-x)^3 & x>2\end{cases}$ را رسم کنید.

حل:

مشتقهای اول و دوم f برابرند با

$$f'(x)=\begin{cases}6(x-2) & x<2\\ -3(2-x)^2 & x>2\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6 & x<2\\ 6(2-x) & x>2\end{cases}$$

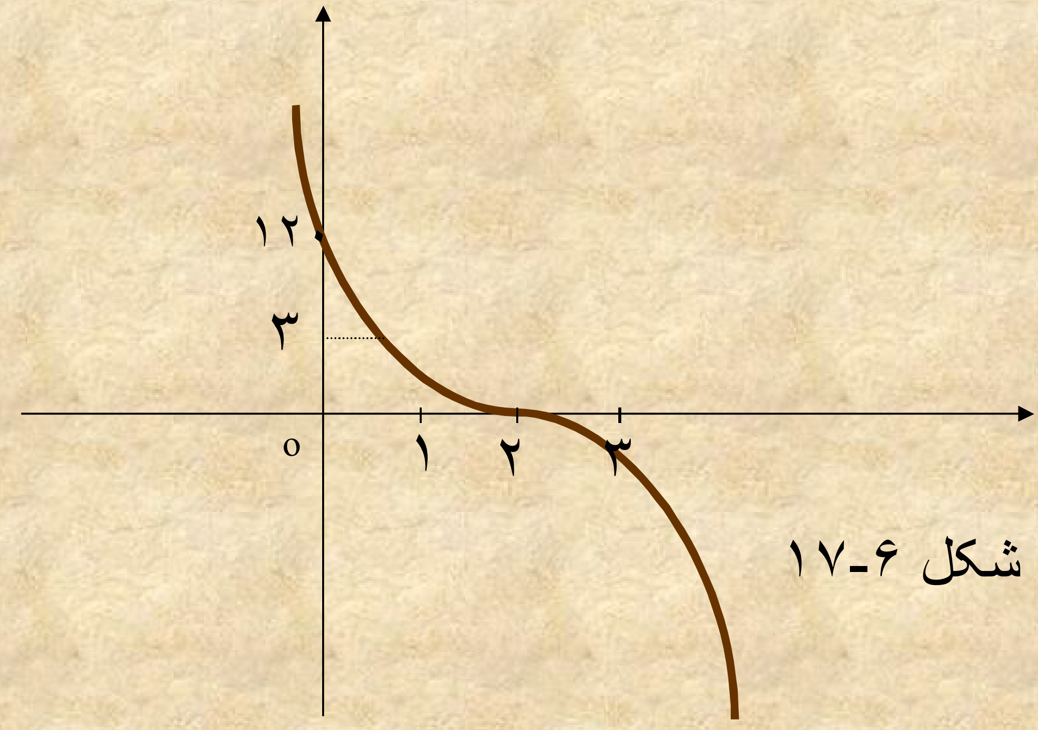
از $f'(x)=0$ به دست می آوریم x=2. مشتقهای چپ وراست f در ۲ برابرند با

$f'_-(2)=0$، $f'_+(2)=0$ بنابراین $f'(2)=0$ یعنی تابع f' در ۲ وجود

دارد ولی $f''(x)$ در ۲ وجود ندارد زیرا $f''_+(2)=0$ و $f''_-(2)=6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	وجود ندارد	−
$f'(x)$	−	o	−
$f(x)$	مقعر و نزولی		محدب و نزولی

نقطه عطف



شکل ۶-۱۷

برای رسم دقیق نمودارتابع،
از چند نقطه دلبخواه
(۱۲,۰)، (۱,۳)، (۳,-۱)
کمک گرفتیم.

۶-۵ صورتهای مبهم

۶-۵-۱ مقدمه:

ممکن است هنگام محاسبه حد بعضی ازتوابع با صورتهایی مانند $\frac{0}{0}$، $\frac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$، $\infty-\infty$، 0^0، ∞^0 و 1^∞ مواجه شویم.این صورتهارا **صورتهای مبهم یا نامعین** می نامیم.دراین بخش باروش رفع ابهام از این صورتهای مبهم آشنا می شویم.

۶-۵-۲ تعریف:

اگردرمورد توابع fوg داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی آید.برای رفع ابهام ازاین صورت مبهم، قضیه زیررا به کارمی بریم.

۶-۵-۳ قضیه (قاعده هوپیتال): فرض می کنیم توابع f و g دربازه بازی شامل نقطه a مانند I، جزاحتمالاً درخود a ،مشتق پذیر باشند.

همچنین فرض می کنیم به ازای هر $x \neq a$ در I داشته باشیم $g'(x) \neq 0$

دراین صورت، اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۶-۵-۴ مثال:

حد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-5}$ را محاسبه کنید.

حل:

چون

$$\lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1}(2x^2+3x-5)=0$$

وشرایط قضیه ۶-۵-۲ نیز برقرار است،می توانیم قاعده هوپیتـال را به

کار ببریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+2}{4x+3}=\frac{4}{7}$$

۶-۵-۹ قضیه (قاعده هوپیتال):

فرض می کنیم دو تابع f و g به ازای هر $x>N$، که N عدد ثابت مثبتی است،

مشتق پذیرباشند.

به علاوه فرض می کنیم برای هر $x>N$ داشته باشیم $g'(x)\neq 0$ در این

صورت اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در حالتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

۶-۵-۱۰ مثال:

حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left[\dfrac{3}{x}\right]}{\dfrac{2}{x}}$ را درصورت وجود،محاسبه کنید.

حل:

چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left[\dfrac{3}{x}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x}\right]=0$ بنابرقضیه ۶-۵-۹ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{3}{x}}{\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{3}{x^2}\cos\dfrac{3}{x}}{-\dfrac{2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cos\left[\dfrac{3}{x}\right]}{2}=\frac{3}{2}$$

۶-۵-۱۲ صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$:

اگردرمورد توابع f و g داشته باشیم $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم

درمی آید.برای رفع ابهام ازاینگونه صورتهاي مبهم از قضیه زیر استفاده

مي کنیم.

۶-۵-۱۳ قضیه(قاعده هوپیتال):

فرض می کنیم توابع f و g دربازه بازی شامل نقطه a مانند I ،جزاحتمالاً در a ، مشتق پذیرباشند وبه ازای هر $x \neq a$ در I داشته باشیم $g'(x) \neq 0$.دراین صورت اگر: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ واگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه درحالتی که همه حدها ،حدهای راست یا حدهای چپ باشند نیزبرقراراست.

۶-۵-۱۶ قضیه(قاعده هوپیتال):

فرض می کنیم توابع f و g به ازای هر x>N که N عدد ثابت مثبتی است،

مشتق پذیرباشند وبه ازای هر x>N داشته باشیم $g'(x) \neq 0$ دراین صورت

اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$ واگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه درحالتی که $x \to -\infty$ نیز برقرار است.

۶-۵-۱۷ مثال:

حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{e^x+5x}$ را درصورت وجود بیابید.

حل:

چون $\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3x-4)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^x+5x)=+\infty$ با استفاده از قاعده هوپیتال به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{e^x+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{e^x+5}$$

اما چون $\lim_{x\to+\infty}[4x+3]=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^x+5x)=+\infty$ یک باردیگر ازقاعده هوپیتال استفاده می کنیم،خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+3}{e^x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x}=0$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4}{e^x+5x}=0$$

۶-۵-۱۹ صورت مبهم $0.\infty$

اگردرمورد توابع f و g داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ آنگاه حد

$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ به صورت مبهم $0.\infty$ در می آید.برای رفع ابهام ،تابع

حاصلضرب f(x).g(x) را به یکی ازدو صورت :

$$f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{یا} \quad f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

می نویسیم.

به این ترتیب حد مورد نظربه یکی ازصورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می شود

که درهردو حالت می توانیم قاعده هوپیتال را به کارببریم.

درصورتی که به جای عدد حقیقی a یکی ازنمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ را داشته

باشیم نیزمی توانیم همین روش را برای رفع ابهام به کارببریم.

۶-۵-۲۰ مثال:

$\lim_{x \to 0^+} x\left[1 - e^{\frac{1}{x}}\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

چون $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ و $\lim_{x\to 0^+}\left[1-e^{\frac{1}{x}}\right] = -\infty$ می نویسیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[1-e^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

حد سمت راست به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است،پس قاعده هوپیتال را به کارمی بریم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left[-e^{\frac{1}{x}}\right] = -\infty$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 0^+}\left[1-e^{\frac{1}{x}}\right] = -\infty$$

۶-۵-۲۲ صورت مبهم $\infty - \infty$

اگردرمورد توابع f و g داشته باشیم

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ بطورت مبهم $\infty - \infty$

درمی آید.برای رفع ابهام ازاین صورت مبهم،آن را به یکی ازدو صورت مبهم

$\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$تبدیل می کنیم.

درصورتی که به جای عدد حقيقي a ، یکی ازنمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ و$+\infty$داشته

باشیم ، نیز به همین ترتیب عمل می کنیم.در دو مثال زیرروش رفع ابهام از این

گونه صورتهای مبهم توضیح داده شده است.

۶-۵-۲۳ مثال:

$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]$ را محاسبه کنید.

حل:

این حد به صورت مبهم $\infty - \infty$ است. ابتدا مخرج مشترک می گیریم.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x\left[e^x-1\right]}$$

حد اخیر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابر قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x\left[e^x-1\right]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}$$

این حد نیزبه صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است، پس یکباردیگرقـاعده هوپیتـال را به کارمی بریم.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$$

درنتیجـه به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right]=\frac{1}{2}$$

۶-۵-۲۴ مثال:

حد $\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\cot x\right]$ محاسبه کنید.

حل:

این حد به صورت مبهم $\infty-\infty$ است.می نویسیم:

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\cot x\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x\tan x}$$

حد سمت راست به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است.ازقاعده هوپیتال استفاده می کنیم.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x-1}{\tan x+x\sec^2 x}$$

این حد نیز به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است.بنابر قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{\tan x+x\sec^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sec^2 x\tan x}{2\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{1+x\tan x}=0$$

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}-\cot x\right]=0$$

۶-۵-۲۶ صورتهای مبهم توانی:

فرض کنیم $y = f(x)^{g(x)}$ و a عددی حقیقی یا یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ باشد،در این صورت

الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم 0^0 در می آید.

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم ∞^0 در می آید.

پ) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به صورت مبهم 1^∞ در می آید.

صورتهای مبهم بالا را صورتهای مبهم توانی می نامیم.

برای رفع ابهام از این گونه صورتهای مبهم،از دو طرف تساوی $y=f(x)^{g(x)}$

لگاریتم طبیعی می گیریم،به دست می آوریم

$$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\cdot \ln f(x)$$

سپس از دو طرف تساوی اخیر هنگامی که $x\to a$ حد می گیریم.

$$\lim_{x\to a}\ln y=g(x)\cdot \ln f(x)$$

حد سمت راست تساوی اخیر به صورتی است که می توان قاعده هوپیتال را

برای رفع ابهام آن به کار برد.در مثالهای زیر روش رفع ابهام از صورتهای

مبهم توانی توضیح داده شده است.